Calcul différentiel et intégral II

Guillaume Dujardin
INRIA Lille Nord Europe
ULB

16 décembre 2019

Table des matières

Préambule

Ce document est un syllabus en travaux.

À terme, les pages qui suivent doivent constituer un document de référence pour tou.te.s les étudiant.e.s de CDI2. Ce document présente l'ensemble de la matière vue en cours, mais se veut aussi plus complet, avec des résultats plus précis et des réponses à certaines questions qui ne sont pas nécessairement abordées en cours tous les ans. Son utilisation ne remplace aucunement le cours dispensé et discuté à l'Université Libre de Bruxelles, que j'invite chacun.e chaleureusement à suivre en y prenant ses propres notes : le cours à l'université est sans doute bien plus vivant, et permet bien plus d'interaction et de motivation(s), qu'un syllabus au format PDF. Ce syllabus répond toutefois aux demandes réitérées des étudiant.e.s d'avoir un document de référence pour le cours.

Pour le moment, ce syllabus n'est pas complet, d'une part, et n'est (vraiment) pas parfait d'autre part. Je tenterai de lui ajouter un peu plus de matière à chaque fois que possible, et mettrai régulièrement en ligne de nouvelles versions.

Enfin, ce syllabus est basé sur des notes de cours que m'a transmises Antoine Gloria, qui donnait ce cours avant moi, elles-mêmes basées sur des notes de Paul Godin, qui le donnait avant lui. Je ne suis donc pas le seul responsable de l'esprit de ce syllabus. Je suis en revanche seul responsable des erreurs qu'il peut contenir. Aussi, dans le but d'améliorer ce document pour le bien de tou.te.s les étudiant.e.s, présent.e.s et futur.e.s, j'invite chacun à m'envoyer ses remarques, questions et suggestions de correction à chaque fois qu'il ou elle repère une imprécision, ou une faute (qu'elle soit typographique ou plus importante) par mail à l'adresse guillaume.dujardin@ulb.ac.be.

À Bruxelles,
Le 16 décembre 2019.

Guillaume Dujardin

Chapitre 1

Suites et séries de fonctions

Le lecteur est supposé avec les nombres réels et complexes, les notions de valeur absolue, de module, les suites réelles ou complexes, et la notion de convergence de ce type de suites. Nous allons dans un premier temps généraliser en 1.1 la notion de convergence d'une suite afin d'autoriser les suites à prendre leurs valeurs dans des ensembles plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On introduira en particulier la notion d'espace métrique et l'on s'intéressera au cas particulier des espaces vectoriels normés. Ceci permettra, dans un second temps, en 1.2, d'introduire les notions de convergence simple et de convergence uniforme de suites de fonctions d'un ensemble X dans un espace métrique Y, ainsi que celle de convergence uniforme sur les compacts lorsque X est un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimenstion finie. En 1.3, on donnera des conditions suffisantes pour préserver des propriétés (d'intégrabilité, de dérivabilité) par passage à la limite dans une suite de fonctions scalaires définies sur des ensembles appropriés. La section 1.4 sera l'occasion d'introduire les séries de fonctions, dans le cas où Y est un espace vectoriel normé, et d'introduire les notions de convergence absolue et de convergence normale. On étudiera le cas particulier des séries de puissances lorsque $X \subset \mathbb{C}$ et Y est un espace vectoriel normé complet.

1.1 Rappels de topologie métrique

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. On appelle* distance *sur X (ou parfois* métrique*) toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

— $\forall x, y \in X, \qquad d(x, y) = d(y, x),$

— $\forall x, y, z \in X, \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$

— $\forall x, y \in X, \qquad (d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y).$

Remarque 1.1.2 *La première propriété traduit le fait que la distance entre deux points x et y de X ne dépend pas du fait qu'on la mesure en allant de x à y ou de y à x : c'est une propriété de* symétrie*.*

La seconde propriété traduit le fait que la distance entre deux points x et z de X est toujours inférieure à la somme des distances de x à y et de y à z, quel que soit le point y de X choisi. On comprendra pourquoi elle s'appelle inégalité triangulaire *en regardant la figure ? ? ?*

La dernière propriété traduit le fait que seul x est à distance nulle de lui-même : tous les autres points de X sont à une distance strictement positive de x. On dit que la distance d sépare les points *de X.*

Définition 1.1.3 *On appelle* espace métrique *tout couple (X, d) formé par un ensemble X et une distance d sur X.*

La notion d'espace métrique permet de définir la notion de convergence d'une suite.

Définition 1.1.4 *Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de points de X et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge vers *x lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\; \exists N \in \mathbb{N},\; \forall n \geq N, \qquad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

L'interprétation de la convergence est la suivante : quelle que soit la distance $\varepsilon > 0$ donnée, tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à une distance de x inférieure à ε à partir d'un certain rang. Bien sûr, ce rang dépend en général de ε.

Notation 1 *On note $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$ pour signifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x au sens de d.*

Quand il n'y a pas d'ambiguité sur la distance, on peut se contenter de noter $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Propriété 1.1.5 *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de points de X et $x, y \in X$. Si l'on suppose que*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x \qquad \text{et} \qquad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} y,$$

alors $x = y$. La limite d'une suite convergence dans un espace métrique est donc unique.

Preuve. À l'aide de l'inégalité triangulaire, écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \qquad d(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, par convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \qquad d(x_n,y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant la symétrie de la distance, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n,x) = d(x,x_n)$. On en déduit que

$$\forall n \geq \max(N_1,N_2), \qquad d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $d(x,y) = 0$. Puisque d sépare les points de X, on en déduit que $x = y$. ■

1.1.2 Espaces vectoriels normés

On désigne par $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Dans la pratique, le plus souvent, on aura $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* norme sur E *toute application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

- $\forall x, y \in E, \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y),$
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x),$
- $\forall x \in E, \qquad (N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E).$

Remarque 1.1.7 *La première propriété, appelée* inégalité triangulaire *explique que la norme de chaque diagonale d'un parallélogramme est inférieure à la somme des normes de deux côtés consécutifs du parallélogramme. La seconde propriété, appelée homogénéité traduit l'action d'une homothétie de rapport λ sur la norme : celle-ci multiplie la norme par le module de λ. Enfin, la dernière propriété assure que le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.*

Définition 1.1.8 *On appelle* $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé *tout couple (E,N) formé d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'une norme N sur E.*

Propriété 1.1.9 *Soit (E, N) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Posons*

$$d : \begin{pmatrix} E \times E & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \mapsto & N(x-y) \end{pmatrix}.$$

Le couple (E, d) est un espace métrique.

Preuve. [exercice pour le lecteur] ■

Remarque 1.1.10 *On peut donc parler, en accord avec la définition 1.1.4, de suite convergente dans un espace vectoriel normé : dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente vers $x \in E$ lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad d(x_n, x) = N(x_n - x) < \varepsilon.$$

Exemple 1.1.11
- *$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé pour la valeur absolue.*
- *$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé pour le module.*
- *$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé pour le module.*

Exemple 1.1.12 *Pour tout $p \in [1, \infty[$ et $d \in \mathbb{N}^\star$, posons pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d$,*

$$\|x\|_d = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^d \right)^{1/d}.$$

Alors $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_d)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. De même, $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_d)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.

Remarque 1.1.13 *Le lecteur pourra se persuader que $\|\cdot\|_d$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^d$ comme sur $\mathbb{C}^d$. Toutefois, l'inégalité triangulaire n'est pas triviale à montrer : elle est appelée inégalité de Minkowski (voir par exemple une preuve dans ? ? ?).*

Exemple 1.1.14 *Pour $x \in \mathbb{C}^d$, posons $\|x\|_\infty = \max\limits_{k\in\{1,\ldots,d\}} |x_k|$. Alors $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. De même, $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.*

Exemple 1.1.15 *Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, notons $(a_k) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ la suite nulle à partir d'un certain rang de ses coefficients, de sorte que $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Définissons*

$$\|P\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Observons que, puisque seul un nombre fini de coefficients est non nul, on a

$$\|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Le lecteur pourra vérifier que $(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé. De même, $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Remarquons que, contrairement aux exemples précédents, ces deux espaces ne sont pas de dimension finie.

1.1.3 Ouverts, fermés, compacts

On rappelle ici les définitions et quelques propriétés topologiques des espaces métriques. Celles-ci sont en particulier applicables aux espaces vectoriels normés, en vertu de la proposition 1.1.9.

Définition 1.1.16 *Soit (X, d) un espace métrique, x un point de X et r un nombre réel strictement positif. On appelle* boule ouverte de centre x et de rayon r *l'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(y, x) < r\}.$$

On appelle boule fermée de centre x et de rayon r *l'ensemble*

$$B(x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}.$$

Définition 1.1.17 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle* ouvert *de X toute partie O de X telle que*

$$\forall x \in O, \ \exists r > 0, \qquad B(x, r) \subset O.$$

Remarque 1.1.18 *Les ensembles $\emptyset$ et X sont toujours des ouverts de X.*

Définition 1.1.19 *Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. On appelle* voisinage de x dans X *toute partie de X qui contient un ouvert contenant x.*

Définition 1.1.20 *Soit (X, d) un espace métrique. On appelle* fermé *de X toute partie O de X dont le complémentaire dans X est ouvert.*

Propriété 1.1.21 *Soit (X, d) un espace métrique, I un ensemble et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de X indexée par I.*
- *L'ensemble $\underset{i \in I}{\cup} O_i$ est un ouvert de X.*
- *Si I est fini, l'ensemble $\underset{i \in I}{\cap} O_i$ est un ouvert de X.*

Définition 1.1.22 *Une partie K d'un espace métrique (X, d) est dite* compacte *si elle est non vide et de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire si*
- $K \neq \emptyset$,
- $\forall I, \ \forall (O_i)_{i \in I} \in \tau(X)^I$,

$$K \subset \underset{i \in I}{\cup} O_i \quad \Longrightarrow \quad \exists J \subset I, \ J \text{ fini}, \ K \subset \underset{j \in I}{\cup} O_j,$$

où $\tau(X)$ désigne l'ensemble des ouverts de X.

Remarque 1.1.23 *Cette propriété, très générale (elle ne fait intervenir la distance d que via l'ensemble $\tau(X)$ des ouverts de X), porte le nom de* propriété de Borel-Lebesgue*.*

De manière équivalente, nous utiliserons le théorème suivant qui caractérise les parties compactes d'un espace métrique.

Théorème 1.1.24 *Soit (X, d) un espace métrique et K une partie non vide de X. La partie K est compacte si et seulement si de toute suite de points de K, on peut extraire une sous-suite convergeant dans K.*

Remarque 1.1.25 *Ce théorème porte le nom de* théorème de Bolzano-Weierstrass*.*

Preuve. admis ■

Les parties compactes d'un espace métrique sont toujours fermées et bornées.

Propriété 1.1.26 *Soit (X, d) un espace métrique et K une partie de X. Si K est compacte, alors K est fermée et bornée.*

Preuve. Exercice ■

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on a une forme de réciproque :

Propriété 1.1.27 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K une partie non vide de E. La partie K est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Preuve. admis ■

Définition 1.1.28 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est localement compact lorsque tout point x admet un voisinage compact.*

Propriété 1.1.29 *Soit (X, d) un espace métrique. L'espace X est localement compact si et seulement si tout point de X admet une base de voisinages compacts, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout voisinage V de X, il existe un voisinage K compact de X, tel que $K \subset V$.*

Preuve. Admis. ■

Remarque 1.1.30 *Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, et $\mathbb{C}^d$, munis de leurs topologies d'espaces métriques usuelles, sont localement compacts. De même, tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact, en utilisant par exemple la propriété 1.1.27.*

1.1.4 Suites de Cauchy

Dans cette section, (X, d) désigne un espace métrique.

Définition 1.1.31 *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est dite* de Cauchy *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

L'interprétation de la propriété de Cauchy (1.1) est la suivante : à partir d'un certain rang, deux termes quelconques de la suite sont toujours arbitrairement proches au sens de la distance d.

Les suites convergentes de (X, d) sont de Cauchy, comme on va le voir dans la propriété suivante.

Propriété 1.1.32 *Si $(x_n)_{n\in N} \in X^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors c'est une suite de Cauchy dans (X, d).*

Preuve. Notons $x \in X$ la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite vers x, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Par suite, pour $n, m \geq N$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). ■

Nous verrons à l'exemple 1.1.45 que la réciproque est fausse en général : une suite de Cauchy dans un espace métrique n'est pas nécessairement convergente. Ceci motive la définition suivante :

Définition 1.1.33 *On appelle espace* complet *tout espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy est convergente.*

Lorsque X est un espace vectoriel normé, on adopte parfois le vocabulaire suivant :

Définition 1.1.34 *On appelle* espace de Banach *tout espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire tout espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge.*

Remarque 1.1.35 *Dans un espace métrique complet, une suite est donc convergente si et seulement si elle est de Cauchy. L'intérêt de la propriété de Cauchy* (1.1) *est qu'elle fournit alors un critère de convergence de suite dans lequel la limite éventuelle n'intervient pas.*

Propriété 1.1.36 *Les espaces suivants sont des espaces de Banach :*
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$,
- $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$,
- $(\mathbb{C}, \|\cdot\|_p)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[\cup\{+\infty\}$,

Preuve. Admis. On pourra trouver une preuve dans ? ? ?. Noter que la preuve repose essentiellement sur la propriété de la borne supérieure pour les nombres réels : si $X \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément. C'est, par définition la borne supérieure de X. ■

1.1.5 Continuité

Définition 1.1.37 *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, soit* f *une fonction de* X *dans* Y *et* a *un point de* X*. On dit que* la fonction f est continue en a *lorsque*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X, \qquad (d_X(x, a) < \eta \ \Rightarrow\ d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon)\,.$$

Définition 1.1.38 *On dit que* f *est continue sur* $\tilde{X} \subset X$ *lorsque* f *est continue en tout point* $a \in \tilde{X}$*.*

Rappelons la propriété suivante, qui peut servir de définition de la continuité dans des espaces (topologiques) plus généraux que les espaces métriques (mais ceci dépasse le cours de CDI II).

Propriété 1.1.39 *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, soit* f *une fonction de* X *dans* Y*. La fonction* f *est continue sur* X *si et seulement si l'image réciproque par* f *de tout ouvert de* Y *est un ouvert de* X*.*

Preuve. Admis. ■

Nous utiliserons régulièrement la propriété suivante, qui caractérise la continuité locale d'une application entre espaces métriques. Puisqu'elle utilise des suites, elle est appelé *critère séqentiel de continuité*.

Propriété 1.1.40 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y et a un point de X. La fonction f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite de points de X convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$. Autrement dit, f est continue en a si et seulement si*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \qquad \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d_X}} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{d_Y}} f(a) \right).$$

Rappelons la définition des fonctions lipschitziennes entre espaces métriques et rappelons que de telles fonctions sont des exemples de fonctions continues.

Définition 1.1.41 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. On dit que* la fonction f est lipschitzienne de X dans Y *lorsque*

$$\exists L \geq 0,\ \forall x, y \in X, \qquad d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Le nombre L est alors appelé constante de Lispchtiz *pour f.*

Remarque 1.1.42 *Une constant de Lipschitz n'est pas unique en général : si f est une fonction Lipschitzienne de constante L, alors pour tout $k \geq L$, f est lipschitzienne de constante k. Remarquer que f est lipschitzienne de constante 0 si et seulement si f est constante sur x.*

Propriété 1.1.43 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. Si f est lipschitzienne de X dans Y, alors f est continue sur X.*

Exemple 1.1.44 *Munissons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|$ définie à l'exemple 1.1.15. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ (avec la suite rélle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang). Pour $i \in \mathbb{N}$, posons*

$$c_i \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k & \longmapsto & a_i \end{pmatrix}.$$

Observons que pour tout $i \in \mathbb{N}$, c_i est une application lipschitzienne de constante 1 de $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, donc une application continue sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 1.1.45 *Nous allons montrer que l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie à l'exemple 1.1.15 n'est pas complet. Pour cela, considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k,$$

et montrons que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ mais ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Observons d'abord que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|P_n - P_m\| = \left\| \sum_{k=\min(n,m)+1}^{\max(n,m)} \frac{1}{k!} X^k \right\| \leq \frac{1}{(\min(n,m)+1)!},$$

ce qui assure que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Supposons maintenant par l'absurde que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathbb{R}[X]$, alors, par continuité sur $\mathbb{R}[X]$ des applications c_i définies à l'exemple 1.1.44, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$c_i(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} c_i(P). \tag{1.2}$$

Observons que, lorsque $n \geq i$, on a $c_i(P_n) = 1/(i!)$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $c_i(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \frac{1}{i!}$. On obtient avec (1.2) que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des coefficients de P vérifie pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 1/(i!)$. Par suite, la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang. Donc $P \notin \mathbb{R}[X]$. Ceci est une contradiction. Par suite, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$. Or elle est de Cauchy dans cet espace. Cet espace vectoriel normé n'est donc pas complet.

Terminons par rappeler le fait que le caractère lipschitzien d'une fonction peut également être défini localement.

Définition 1.1.46 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit f une fonction de X dans Y. On dit que* la fonction f est localement lipschitzienne de X dans Y *lorsque pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x dans X sur lequel la fonction f est, par restriction, lipschitzienne.*

1.2 Convergences de suites de fonctions

1.2.1 Convergence simple

Dans cette section, on introduit la notion de convergence ponctuelle (aussi dit simple) d'une suite de fonctions. On verra plus tard que c'est en quelque sorte la notion “minimale” de convergence : toute autre convergence implique la convergence simple.

Définition 1.2.1 *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans Y. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge simplement sur X *lorsque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (Y, d).*

Définition 1.2.2 *Avec les notations précédentes, lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X, on peut définir une fonction*

$$f \ : \ \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \end{pmatrix}.$$

La fonction f est alors appelée limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X.

On notera par la suite $f_n \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ X}]{\text{CVS}} f$ lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X.

Exemple 1.2.3 *Considérons $X = Y = [0, 1]$ munis de la distance induite par la valeur absolue. Définissons la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, 1], \qquad f_n(x) = x^n.$$

On vérifie aisément que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *vers la fonction*

$$f\ :\ \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & x<1 \\ 1 & si & x=1 \end{array}\right. \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.4 *Dans l'exemple 1.2.3 précédent, on a perdu la continuité par passage à la limite simple : chaque fonction* f_n *est continue de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$*, mais ce n'est pas le cas de la fonction* f*.*

Remarque 1.2.5 *La convergence simple de* (f_n) *vers* f *sur* X *s'écrit donc :*

$$\forall x\in X,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\qquad d(f_n(x),f(x))<\varepsilon.$$

Dans la proposition ci-dessus, l'entier N *dépend donc a priori de* ε *et de* x*. Lorsque l'on peut choisir le rang* N *indépendamment de* x*, on parle de* convergence uniforme*, comme on va le voir dans la section suivante.*

1.2.2 Convergence uniforme

On introduit maintenant la notion de convergence uniforme sur une partie pour une suite de fonctions à valeurs dans un espace métrique. C'est une notion un peu plus forte et plus subtile que la convergence simple. Elle permet cependant de conserver nombre de propriétés par passage à la limite, comme on va le voir dans la suite du cours.

Définition 1.2.6 *On dit qu'une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions d'un ensemble* X *dans un espace métrique* (Y,d) converge uniformément sur X *vers la fonction* $f:X\longrightarrow Y$ *lorsque*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \forall x\in X,\qquad d(f_n(x),f(x))<\varepsilon.$$

De manière équivalente, ceci s'écrit

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\qquad \sup_{x\in X} d(f_n(x),f(x))<\varepsilon.$$

On notera par la suite $f_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ X}}{\overset{\text{CVU}}{\longrightarrow}} f$ lorsque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.

Propriété 1.2.7 *Avec les notations précédentes,*

$$f_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ X}}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} f \qquad\Longrightarrow\qquad f_n \underset{\substack{n\to+\infty\\ X}}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} f.$$

Autrement dit, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*, alors elle converge simplement vers la même fonction* f *sur* X*.*

Ainsi, la convergence uniforme implique la convergence simple.

Exemple 1.2.8 *Considérons la situation où $X = Y = \mathbb{R}$, où $Y = \mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue. Définissons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par*

$$f_n \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$f \ : \ \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{pmatrix}.$$

En outre, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

on peut conclure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Le lecteur est invité à compléter les détails dans l'exemple précédent. Par ailleurs, on observe que chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la limite uniforme f est également continue sur $\mathbb{R}$. C'est en fait un fait général, comme on va le voir maintenant.

Propriété 1.2.9 *Soit (X, d) et (Y, d) deux espaces métriques[1] , a un point de X, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers f sur X. Dans ce cas, la fonction f est continue en a.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, il existe un rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall x \in X, \qquad d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(a)) &\leq \underbrace{d(f(x), f_{N_\varepsilon}(x))}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) + \underbrace{d(f_{N_\varepsilon}(a), f(a))}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) \end{aligned}$$

Puisque la fonction f_{N_ε} est continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$, on a $d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(a)) < \varepsilon$. On en déduit que pour $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$, on a

$$d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ tel que $d(x, a) < \eta$ on a $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Ainsi, la fonction f est continue en a. ■

La préservation de la continuité locale par passage à la limite uniforme a pour conséquence la préservation de la continuité globale par passage à la limite uniforme :

1. On note ici d la distance sur X et la distance sur d car il serait difficile de les confondre dans la preuve du théorème. Cependant, il peut, dans la pratique, s'agir de deux distances différentes.

Corollaire 1.2.10 *Soit (X, d) et (Y, d) deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur X, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers f sur X. Dans ce cas, la fonction f est continue sur X.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la propriété 1.2.9 en tout point a de X. ■

1.2.3 L'espace vectoriel normé $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$

Lorsque X est un ensemble, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, on note $B(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E :

$$B(X, E) = \{f : X \longrightarrow E \mid \exists M > 0,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\|_E \leq M\}.$$

Lorsque $X \neq \emptyset$, et $f \in B(X, E)$, on pose

$$\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E.$$

Il s'agit d'un nombre réel positif ou nul.

On a alors la propriété de structure suivante sur l'ensemble des fonctions bornées de X dans E :

Propriété 1.2.11 *Lorsque $X \neq \emptyset$, $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est un espace vectoriel normé.*

Preuve. [Exercice laissé au lecteur : il s'agit de verifier d'une part que $B(X, E)$ est un espace vectoriel et d'autre part que $\|\cdot\|_{\infty,X}$ définit une norme sur E.] ■

Notation 2 *On notera parfois simplement $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de $\|\cdot\|_{\infty,X}$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion.*

On peut ajouter le critère suivant, qui permet de dire si $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est ou non un espace complet (*i.e.* de Banach) :

Propriété 1.2.12 *Lorsque $X \neq \emptyset$, l'espace vectoriel $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.*

Preuve. Raisonnons par double implication. Le sens le plus simple est le sens direct. Supposons que $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de E et montrons que celle-ci converge dans E. Définissons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X dans E en posant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad f_n(x) = y_n.$$

Ces fonctions f_n sont constantes sur X. De plus,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f_m\|_{\infty,X} = \|y_n - y_m\|_E.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Cet espace étant complet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Ainsi, il existe $f \in B(X, E)$ telle que

$\|f_n - f\|_{\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il est facile de vérifier que f est constante sur X, égale à un certain $y \in E$. Puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} = \|y_n - y\|_E,$$
il vient que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Ceci prouve que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.
Réciproquement, supposons que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet, et considérons une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy de fonctions de $(B(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Fixons $x \in X$ et remarquons que
$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E \leq \|f_n - f_m\|_{\infty,X}.$$
Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(B(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$, cette inégalité assure que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n, m \geq N, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E < \varepsilon,$$
Par conséquent, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Puisque cet espace est complet par hypothèse, il existe $f(x) \in E$ tel que
$$f_n(x) \overset{\|\cdot\|_E}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f(x).$$
Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(B(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$, elle est bornée dans cet espace. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n\|_{\infty,X} \leq M.$$
On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n(x)\|_E \leq M.$$
En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient
$$\|f(x)\|_E \leq M.$$
Ceci assure que $f \in B(X,E)$. Montrons maintenant que $f_n \overset{\|\cdot\|_{\infty,X}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$, en revenant une fois de plus au fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(B(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n, m \geq N,\ \forall x \in X, \qquad \|f_n(x) - f_m(x)\|_E < \varepsilon.$$
En passant à la limite sur m dans cette inégalité, il vient
$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \qquad \|f_n(x) - f(x)\|_E \leq \varepsilon,$$
et donc
$$\forall n \geq N, \qquad \|f_n - f(x)\|_{\infty,X} \leq \varepsilon,$$
Ceci montre que $f_n \overset{\|\cdot\|_{\infty,X}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f$. Par suite, l'espace $(B(X,E), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet. ■

Remarque 1.2.13 *Lorsque $X \neq \emptyset$ est un ensemble et Y est un espace vectoriel normé, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de X dans Y converge uniformément vers une fonction f de X dans Y si et seulement si, à partir d'un certain rang, $f_n - f \in B(X,E)$ et de plus $\|f_n - f\|_{\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Il n'est en particulier pas nécessaire que f ou certaines fonctions f_n soient elles-mêmes dans $B(X,E)$ (on pourra consulter l'exemple 1.2.8).*

En adaptant la preuve du résultat précédent, on montre le critère de Cauchy uniforme :

Propriété 1.2.14 *Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble et Y un espace de Banach. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge uniformément sur X si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N}, \Big(n, p \geq N \implies (\forall x \in X,\ \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon)\Big)$$

Preuve. Dans le sens direct, il suffit d'appliquer une inégalité triangulaire en écrivant au préalable que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad f_n - f_p = (f_n - f) - (f_p - f).$$

Dans le sens réciproque, il suffit d'adapter la preuve précédente et de constater que
- par complétude de Y, la suite f_n converge simplement sur X vers une fonction $f : X \to Y$;
- la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est en fait uniforme sur X.

■

Remarque 1.2.15 *Ici encore, il n'est pas nécessaire que f ou certaines fonctions f_n soient dans $B(X, E)$ (voir l'exemple 1.2.8).*

1.2.4 Convergence uniforme sur les compacts

Lorsque X possède lui-même une structure métrique, on peut parler de convergence uniforme sur les compacts de X.

Définition 1.2.16 *Soit (X, d) et (Y, d) deux espaces métriques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de X lorsque pour tout compact $K \subset X$, on a*

$$f_n \overset{CVU\ sur\ K}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} f,$$

c'est-à-dire lorsque pour tout compact $K \subset X$,

$$\sup_{x\in K} d(f(x), f_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 1.2.17 *Pour $X = Y = \mathbb{R}^+$, la suite de fonctions*

$$f_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{pmatrix},$$

converge vers la fonction exponentielle uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^+$, comme on le montre facilement à partir de la formule :

$$\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

Observons que l'on conserve sur l'exemple précédent une fois de plus la continuité par passage à la limite uniforme sur les compacts. C'est en fait général, comme nous allons le voir dans les propriétés suivantes. On distigue les énoncés comme les preuves, suivant que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ ou bien un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et suivant que l'on souhaite préserver la continuité ponctuelle ou globale par passage à la limite uniforme sur les compacts.

Propriété 1.2.18 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (Y, d) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans Y et f une fonction de I dans Y. Soit x_0 un point de I. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de I. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue en x_0, alors la fonction f est continue en x_0.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que x_0 n'est pas une extremité de I. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. Par suite, le compact $K = [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2]$ est inclus dans I. L'hypothèse assure que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K. La proposition 1.2.9 montre alors que f est continue en x_0.
Supposons maintenant que x_0 est une extrémité de I. Il existe $\delta > 0$ tel que $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ est un compact de $\mathbb{R}$ inclus dans I. La proposition 1.2.9 permet également de conclure, puisque la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur le compact $I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, que f est continue en x_0. ■

On en déduit immédiatement la propriété de préservation de la continuité globale par la convergence uniforme sur les compacts d'un intervalle de $\mathbb{R}$:

Propriété 1.2.19 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (Y, d) un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans Y et f une fonction de I dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de I, alors f est continue sur I.*

Preuve. Exercice : utiliser la propriété 1.2.18. ■

Remarque 1.2.20 *Remarquons que, lorsque $I = X$ est un invervalle de $\mathbb{R}$, il revient au même de dire qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de I dans (Y, d) converge uniformément sur les compacts de I ou qu'elle converge uniformément sur les segments de I. C'est une conséquence du fait qu'un segment est toujours compact, et que tout compact de I est inclus dans un segment de I.*

Voyons maintenant comment la continuité locale est préservée par la convergence uniforme sur les compacts d'un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Propriété 1.2.21 *Soit X une partie ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et f une fonction de X dans Y. Soit x_0 un point de X. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de X. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue en x_0, alors la fonction f est continue en x_0.*

Preuve. Soit $\delta > 0$ tel que $B(x_0, \delta) \subset X$ [2]. La partie $K = B(x_0, \delta/2]$ est non vide, fermée et bornée dans l'espace vectoriel normé de dimension finie. Elle est donc compacte dans cet espace par la propriété 1.1.27, donc compacte dans X. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compacts de X, il y a convergence uniforme sur K. On conclut à l'aide de la proposition 1.2.9 que f est continue en x_0. ■

On a également la propriété suivante de préservation de la continuité globale par passage à la limite uniforme sur les compacts sur un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie :

2. La notation est introduite à la définition 1.1.16.

Propriété 1.2.22 *Soit X une partie ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans Y et f une fonction de X dans Y. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur les compacts de X, alors la fonction f est continue sur X.*

Preuve. Exercice : utiliser la propriété 1.2.21. ∎

1.3 Suites de fonctions et opérations d'intégration et de dérivation

Nous allons nous placer sur un pavé X de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire un produit cartésien de d segments de $\mathbb{R}$ pour traiter la question du passage à la limite dans une intégrale [3]. Nous travaillerons ensuite sur un ouvert X de $\mathbb{R}^d$ pour traiter la question du passage à la limite dans une dérivation.

1.3.1 Passage à la limite dans une intérale de Riemann

Théorème 1.3.1 *Soit $d \in \mathbb{N}^\star$, et $X = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$ (avec pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $a_i \leq b_i$) un pavé de $\mathbb{R}^d$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables de X dans $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ uniformément sur X, alors*

1. *la fonction f est Riemann-intégrable sur X.*
2. *la suite réelle $(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
3. *$\int_X f_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x)\mathrm{d}x$.*

Preuve. Lorsqu'il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $a_i = b_i$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, $a_i < b_i$. Notons $V = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i)$ et observons que $V > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons, par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur X, un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_\varepsilon, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} \leq \frac{\varepsilon}{2V}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in X, \qquad f_{N_\varepsilon}(x) - \frac{\varepsilon}{4V} \leq f(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x) + \frac{\varepsilon}{4V}.$$

Puisque f_{N_ε} est Riemann-intérable sur X, il existe deux fonctions élémentaires [4] sur X, φ et ψ, telles que

$$\forall x \in X, \qquad \varphi(x) \leq f_{N_\varepsilon}(x) \leq \psi(x), \qquad \text{et} \qquad \int_X (\psi(z) - \varphi(z))\mathrm{d}z \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que les fonctions $\varphi_\varepsilon = \varphi - \varepsilon/(4V)$ et $\psi_\varepsilon = \psi + \varepsilon/(4V)$ sont élémentaires sur X, qu'elles vérifient

$$\forall x \in X, \qquad \varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x),$$

et également

$$\int_X (\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x))\mathrm{d}x = \int_X (\psi(x) - \phi(x) + 2\frac{\varepsilon}{4V})\mathrm{d}x = \int_X (\psi(x) - \phi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

3. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $Y = \mathbb{R}$. On a le même résultats pour $Y = \mathbb{C}$ en séparant les parties rélles et imaginaires, et avec $Y = \mathbb{R}^d$ ou encore $Y = \mathbb{C}^d$ en travaillant composante par composante.

4. C'est-à-dire qu'elles sont combinaison linéaires (d'un nombre fini) de fonctions caracteristiques de pavés inclus dans X.

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que la fonction f est Riemann-intégrable sur X.
Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$ et trouvons par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur X un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,X} \leq \frac{\varepsilon}{V}.$$

On a pour $n \geq N$,

$$\left|\int_X f_n(x)\mathrm{d}x - \int_X f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \leq \|f_n - f\|_{\infty,X}\int_X 1\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{\infty,X} V \leq \varepsilon.$$

Ceci assure la convergence de la suite $(\int_X f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\int_X f(x)\mathrm{d}x$ et achève la preuve. ■

Remarque 1.3.2 *Le théorème 1.3.1 donne des conditions suffisantes pour obtenir l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions sur un produit de segments et la convergence des intégrales vers la l'intégrale de la limite de la suite. Bien entendu, la conclusion de ce théorème peut être vérifiée sans nécessairement que les hypotèses le soient. On pourra par exemple considérer le cas $d = 1$, $[a_1, b_1] = [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{pmatrix},$$

pour lequel il y a convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction f nulle sur $[0, 1[$ et valant 1 en 1, qui est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$, la suite des intégrales converge vers 0 qui est bien l'intégrale de f. Cependant, on n'a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$ de f_n vers f. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = 1.$$

Remarque 1.3.3 *À l'inverse, il existe des situations (ne vérifiant pas toutes les hypothèses du théorème 1.3.1) dans lesquelles la conclusion du théorème est fausse. Considérons par exemple (toujours avec $d = 1$ et $[a_1, b_1] = [0, 1]$) la suite de fonctions*

$$f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 4n^2x & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ -4n^2x + 4n & \text{si} \quad \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix},$$

On vérifie alors la convergence simple de f_n vers la fonction nulle. On a de plus que f_n est affine par morceaux sur $[0, 1]$, donc Riemann-intégrable sur $[0, 1]$. Enfin, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, laquelle est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$. Cependant, on vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x = 1,$$

donc la suite réelle $(\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui n'est pas $\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque 1.3.4 *On peut généraliser le théorème 1.3.1 au cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ en séparant les parties réelles et imaginaires, ainsi que dans les espaces $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{C}^d$ pour $d \geq 2$ en travaillant composante par composante.*

1.3.2 Passage à la limite dans une suite de fonctions de classe C^1

On travaille dans cette section avec X un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ou intervalle I de $\mathbb{R}$ (qui n'est pas nécessairement ouvert), à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe C^1 sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, convergeant au moins simplement vers une fonction f sur X et l'on va donner des conditions suffisantes pour assurer que f est également de classe C^1 sur X et l'on a

$$\forall x \in X, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \tag{1.3}$$

Commençons par considérer les deux exemples suivants :

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad f_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\cos(n^2x)}{n} \end{pmatrix},$$

est une suite de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. On observe que la suite $(f_n'(0))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des dérivées de f_n en 0 diverge, rendant impossible un résultat de type (1.4). Ainsi, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^star}$ sur X n'est pas une condition suffisante car la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^star}$ peut diverger.

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad f_n : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^n}{n} \end{pmatrix},$$

est une suite de fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$. On observe que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^\star}$ des dérivées de f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction caractéristique du singleton $\{1\}$, rendant impossible un résultat de type (1.4) car

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)\right)(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n\right)\right)(1) = 1 \tag{1.4}$$

Ainsi, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^star}$ sur X et la convergence simple de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^star}$ des dérivées de f_n sur X n'est pas non plus une condition suffisante pour assurer un résultat de type (1.4).

Donnons maintenant une condition suffisante.

Théorème 1.3.5 *Fixons $d \in \mathbb{N}^\star$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non-vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de clase C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons que*

— *La suite f_n converge simplement sur Ω ;*

— *Pour tout $k \in \{1,\dots,d\}$, la suite $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certain fonction g_k, uniformément sur les compacts de Ω ;*

alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers une certaine fonction f. De plus, la fonction f est de classe C^1 sur Ω et l'on a

$$\forall k \in \{1,\dots,d\},\ \forall x \in \Omega, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = g_k(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \{1,\dots,d\},\ \forall x \in \Omega, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)\right)(x) = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)\right)(x).$$

Preuve. Pour montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, nous allons montrer qu'elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles par rapport à chacune des d variables, et que chacune de ces dérivées partielles est une application continue sur Ω. Nous montrerons ensuite que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur les compacts de Ω.
Le caractère C^1 des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que les fonctions $(\frac{\partial}{\partial x_k} f_n)_{1\le k\le d, n\in\mathbb{N}}$ sont continues sur Ω. La convergence uniforme sur les compacts de Ω de ces dernières implique la continuité des fonctions $(g_k)_{1\le k\le d}$ par la propriété 1.2.21. Notons f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω.
Notons $(e_1,\dots,e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $x_0\in\Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $\delta>0$ tel que $B(x_0,\delta)$ est inclus dans Ω. Remarquons que $B(x_0,\delta/2]$ est un compact de Ω. Écrivons que pour tout $h\in[-\delta/2,\delta/2]$, $i\in\{1,\dots,d\}$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad f_n(x_0+he_i)=f_n(x_0)+\int_0^h \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x_0+se_i)\mathrm{d}s.$$

Par convergence simple de f_n vers f sur Ω, et par convergence uniforme de $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ vers g_i sur le compact $B(x_0,\delta/2]$, en utilisant le théorème 1.3.1, on obtient en passant à la limite dans l'identité précédente, pour $h\in[-\delta/2,\delta/2]$, $i\in\{1,\dots,d\}$,

$$f(x_0+he_i)=f(x_0)+\int_0^h g_i(x_0+se_i)\mathrm{d}s.$$

La continuité des g_i en x_0 assure que f admet des dérivées partielles par rapport à chaque variable en x_0 et l'on a

$$\forall i\in\{1,\dots,d\},\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=g_i(x_0).$$

Ceci valant pour tout $x_0\in\Omega$, et les fonctions g_i étant continues sur Ω, il vient que f est de classe C^1 sur Ω et pour tout i, $g_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans Ω.
Il reste à montrer que la convergence de f_n vers f est uniforme sur les compacts de Ω. Soit K un compact de Ω. Puisque Ω est ouvert, pour tout $a\in K$, il existe $r_a>0$ tel que $B(a,r_a)\subset\Omega$. Ainsi, on a

$$K\subset\cup_{a\in K}B(a,r_a/2).$$

Puisque K est compact, on peut par la propriété de Borel-Lebesgue (définition 1.1.22) extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert ci-dessus : il existe $p\in\mathbb{N}^\star$ et $a_1,\dots,a_p\in K$ tels que

$$K\subset\cup_{k\in\{1,\dots,p\}}B(a_k,r_{a_k}/2).\tag{1.5}$$

Observons que pour tout $a\in K$, $B(a,r_a/2]\subset B(a,r_a)\subset\Omega$. Posant $\tilde{K}=\cup_{k\in\{1,\dots,p\}}B(a_k,r_{a_k}/2]$, on obtient que

$$K\subset\tilde{K}\subset\Omega,$$

et par ailleurs $\tilde{K}$ est compact comme réunion finie de compacts. Fixons $\varepsilon>0$. Par convergence simple de f_n vers f aux points $(a_k)_{1\le k\le p}$, on a, puisque ceux-ci sont en nombre fini,

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\ge N,\ \forall k\in\{1,\dots,p\},\qquad |f_n(a_k)-f(a_k)|\le\varepsilon.$$

Soit $x\in K$. Par la propriété de sous-recouvrement fini (1.5) de K, il existe $k\in\{1,\dots,p\}$ tel que $x\in B(a_k,r_{a_k})$. Écrivons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$f_n(x)=f_n(a_k)+\int_0^1(x-a_k).(\nabla f_n(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t,$$

et également

$$f(x)=f(a_k)+\int_0^1 (x-a_k).(\nabla f(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t,$$

car les fonctions f_n et f sont de classe C^1 sur Ω. Par soustraction, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$f_n(x)-f(x)=f_n(a_k)-f(a_k)+\int_0^1 (x-a_k).(\nabla(f_n-f)(a_k+t(x-a_k)))\mathrm{d}t.$$

Par inégalité triangulaire, il vient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|f_n(x)-f(x)|\le|f_n(a_k)-f(a_k)|+\int_0^1 |(x-a_k).(\nabla(f_n-f)(a_k+t(x-a_k)))|\mathrm{d}t.$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient pour $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&|f_n(x)-f(x)|\\
&\le\ |f_n(a_k)-f(a_k)|+\int_0^1 \|x-a_k\|\ \|\nabla(f_n-f)(a_k+t(x-a_k))\|\mathrm{d}t\\
&\le\ |f_n(a_k)-f(a_k)|+\|x-a_k\|\ \int_0^1 \|\nabla(f_n-f)(a_k+t(x-a_k))\|\mathrm{d}t\\
&\le\ |f_n(a_k)-f(a_k)|+\Big(\max_{1\le j\le p} r_{a_j}\Big)\int_0^1 \|\nabla(f_n-f)\|_{\infty,B(a_k,r_{a_k})}\mathrm{d}t\\
&\le\ |f_n(a_k)-f(a_k)|+\Big(\max_{1\le j\le p} r_{a_j}\Big)\|\nabla(f_n-f)\|_{\infty,\tilde{K}}.
\end{aligned}$$

Par convergence uniforme des dérivées premières des f_n vers celles de f sur le compact $\tilde{K}$, il existe $M\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\le M,\qquad \|\nabla(f_n-f)\|_{\infty,\tilde{K}}\le\frac{\varepsilon}{\max_{1\le j\le p} r_{a_j}}.$$

Avec ce qui précède, on a pour $n\ge\max(N,M)$,

$$\forall x\in K,\qquad |f_n(x)-f(x)|\le 2\varepsilon.$$

Ceci achève de montrer la convergence uniforme de f_n vers f sur les compacts de Ω. ■

En utilisant le théorème précédent pour l'initialisation comme pour l'hérédité, on montre par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^\star$ le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.6 *Soit $p\ge 1$ un entier, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω à valeurs rélles ou complexes. Supposons que*

- *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur Ω,*
- *pour tout $q\in\{1,\ldots,p-1\}$, et $(i_1,\ldots,i_q)\in\{1,\ldots,d\}^q$, la suite $(\frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_q}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $g_{i_1,\ldots,i_q}$ sur Ω,*
- *pour tout $(i_1,\ldots,i_p)\in\{1,\ldots,d\}^p$, la suite $(\frac{\partial^p f_n}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_p}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $g_{i_1,\ldots,i_p}$ uniformément sur les compacts de Ω,*

alors

- *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur Ω,*
- *quels que soient $q\in\{1,\ldots,p\}$, et $(i_1,\ldots,i_q)\in\{1,\ldots,d\}^q$,*

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_q}}=g_{i_1,\ldots,i_q}, \tag{1.6}$$

— *pour tout $q \in \{0, \ldots, p\}$, chaque dérivée partielle d'ordre q de f_n converge vers la dérivée partielle de f correspondante uniformément sur les compacts de Ω.*

Remarque 1.3.7 *Notons que la relation* (1.6) *s'écrit encore quels que soient $q \in \{1, \ldots, p\}$ et $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,*

$$\frac{\partial^q}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\partial^q f_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}}.$$

1.4 Séries de fonctions

Lorsque Y est un espace vectoriel, l'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des fonctions de X dans Y est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel. En ajoutant à Y une topologie d'espace normé, on peut définir en plus des notions de convergence dans $\mathcal{F}(X, Y)$ (convergence simple, convergence uniforme sur X, etc). Une des façons de tirer avantage de cette structure est d'introduire la notion de séries de fonctions, qui sont en fait des suites définies par l'accroissement entre deux termes consécutifs (qu'on appellera *terme général* de la série). Bien sûr, puisqu'une série de fonctions est une suite de fonctions, on pourra appliquer aux séries de fonctions l'ensemble des résultats du cours sur les suites de fonctions. Par ailleurs, nous allons introduire de nouveaux outils, tels que la convergence normale, le critère de D'Alembert, le critère d'Abel, qui seront propres aux séries.

Dans ce chapitre, X désigne un ensemble et Y est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.1 *Soit X un ensemble et Y un espace vectoriel. On se donne $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y et l'on appelle série de terme général u_n la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X dans Y définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{pmatrix}.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des sommes partielles de la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.4.1 Retranscription des résultats sur les suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions

On suppose que Y est un espace vectoriel normé.

Définition 1.4.2 *On dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, respectivement uniformément, sur X lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, respectivement uniformément, sur X.*

Définition 1.4.3 *Lorsque la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur X, on appelle somme de la série la fonction*

$$S : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \end{pmatrix}.$$

La propriété 1.2.7 se traduit par le fait que

Propriété 1.4.4 *Si la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* X*, alors elle converge simplement sur* X*.*

Supposons que X est un espace métrique. La propriété 1.2.9 de préservation de la continuité par passage à la limite uniforme se traduit par le résultat suivant.

Propriété 1.4.5 *Soit* $a \in X$*. Supposons que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est continue en* a *et que la série de terme général* u_n *converge uniformément sur* X*. Alors la somme* S *de la série est continue en* a*.*

On en déduit la propriété globale suivante, qui est une adaptation du corollaire 1.2.10.

Propriété 1.4.6 *Supposons que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est continue sur* X *et que la série de terme général* u_n *converge uniformément sur* X*. Alors la somme* S *de la série est continue sur* X*.*

On peut également adapter le théorème 1.3.1 de passage à la limite dans une intégrale sur un pavé de $\mathbb{R}^d$ lorsque la convergence est uniforme sur le pavé.

Théorème 1.4.7 *Soit* $d \in \mathbb{N}^\star$*, et* $X = \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$ *(avec pour tout* $i \in \{1, \ldots, d\}$*,* $a_i \leq b_i$*) un pavé de* $\mathbb{R}^d$*. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions Riemann-intégrables de* X *dans* $\mathbb{R}$*. Si la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une fonction* $S : X \to \mathbb{R}$ *uniformément sur* X*, alors*

1. *la fonction* S *est Riemann-intégrable sur* X*.*
2. *la suite réelle* $(\int_X S_n(x)\mathrm{d}x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
3. $\int_X S_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X S(x)\mathrm{d}x$*.*

Remarque 1.4.8 *Comme pour le théorème 1.3.1, on peut généraliser au cas où le terme général prend ses valeurs dans* $\mathbb{C}$ *en séparant parties réelle et partie imaginaire, puis au cas où le terme général prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *ou* $\mathbb{C}^d$ *pour* $d \geq 2$ *en travaillant composante par composante.*

Enfin, on peut retranscrire le résultat de dérivabilité pour les séries (corollaire 1.3.6) comme suit.

Théorème 1.4.9 *Soit* $p \geq 1$ *un entier,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* Ω *à valeurs rélles ou complexes. Supposons que*

- *la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* S *sur* Ω*,*
- *pour tout* $q \in \{1, \ldots, p-1\}$*, et* $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$*, la série de terme général* $(\frac{\partial^q u_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* $S_{i_1,\ldots,i_q}$ *sur* Ω*,*
- *pour tout* $(i_1, \ldots, i_p) \in \{1, \ldots, d\}^p$*, la série de terme général* $(\frac{\partial^p u_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une fonction* $S_{i_1,\ldots,i_p}$ *uniformément sur les compacts de* Ω*,*

alors

- *la fonction* S *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* Ω*,*
- *quels que soient* $q \in \{1, \ldots, p\}$*, et* $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$*,*

$$\frac{\partial^q S}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} = S_{i_1,\ldots,i_q}, \tag{1.7}$$

- *pour tout* $q \in \{0, \ldots, p\}$*, chaque dérivée partielle d'ordre* q *de la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers la dérivée partielle de* S *correspondante uniformément sur les compacts de* Ω*.*

Remarque 1.4.10 *Notons que la relation* (1.7) *s'écrit encore quels que soient* $q \in \{1, \ldots, p\}$ *et* $(i_1, \ldots, i_q) \in \{1, \ldots, d\}^q$,

$$\frac{\partial^q}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}} \left(\lim_{n \to +\infty} S_n \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\partial^q S_n}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_q}}.$$

Remarque 1.4.11 *La cas* $p = 1$ *dans le théorème 1.4.9 correspond à l'adaptation aux séries de fonctions du théorème 1.3.5.*

1.4.2 Convergence normale d'une série de fonctions

X désigne un ensemble non vide et Y un espace vectoriel normé.

Définition 1.4.12 *On dit que la série de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement sur* X *lorsque la série d'élements de* $B(X, Y)$ *de terme général* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge absolument dans* $(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$*, c'est-à-dire lorsque la série de terme général positif* $(\|u_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}^+$*. Ceci s'écrit encore*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty. \tag{1.8}$$

Remarque 1.4.13 *Avec la définition de la norme infinie sur* X*, la convergence normale exprimée par* (1.8) *s'écrit encore*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x\in X} \|u_n(x)\| < +\infty$$

Définition 1.4.14 *On dit qu'une série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ *vérifie le critère de Weierstrass sur* X *s'il existe une suite réelle positive* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \|u_n(x)\| \leq M_k$$

On vérifie aisément à l'aide des définitions ci-dessus la propriété suivante.

Propriété 1.4.15 *Une série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ *converge normalement sur* X *si et seulement si elle vérifie le critère de Weierstrass sur* X.

Lorsque $(Y, \|\cdot\|)$ est complet, la convergence normale implique la convergence uniforme.

Propriété 1.4.16 *Supposons que l'espace* $(Y, \|\cdot\|)$ *est complet. Si la série de fonctions de terme général* $u_n : X \mapsto Y$ *converge normalement sur* X*, alors elle converge uniformément sur* X.

Preuve. La convergence normale de la série de terme général u_n est la convergence absolue dans l'espace $(B(X, Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Puisque $(Y, \|\cdot\|)$ est complet, l'espace $(B(X, Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$ est complet par la propriété 1.2.12. Dans un espace complet, la convergence absolue implique la convergence simple, donc la série de terme général u_n converge simplement dans $(B(X, Y), \|\cdot\|_{\infty,X})$. Cette convergence simple est exactement la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général u_n. ∎

Remarque 1.4.17 *On retiendra, pour les séries de fonctions de $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un Banach Y, que*

$$\text{CVN sur } X \quad \Longrightarrow \quad \text{CVU sur } X \quad \Longrightarrow \quad \text{CVS sur } X,$$

et les implications réciproques sont fausses en général.

En effet, on sait déjà que la convergence simple n'implique pas la convergence uniforme (voir l'exemple 1.2.3 sur les suites de fonctions). Donnons un exemple de série de fonctions convergeant uniformément sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais ne convergeant pas normalement sur $[0,1]$. Considérons pour cela la série de terme général $u_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n : \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n+1} \text{ si } x \in [1/2^{n+1}, 1/2^n[\\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right).$$

Observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

de sorte que la série de terme général u_n ne converge pas normalement sur $[0,1]$. Cependant, on a

$$\forall m > n \geq 0, \qquad \| \sum_{k=0}^{m} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \|_\infty = \| \sum_{k=n}^{m} u_k \|_\infty = \frac{1}{n+1},$$

de sorte que la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est de Cauchy dans $(B([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, donc elle converge uniformément sur $[0,1]$ par la propriété 1.2.12.

Remarquons enfin que, pour étudier une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, il peut parfois être utile de penser à étudier la série telescopique associée.

Définition 1.4.18 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un espace vectoriel Y. On appelle série téléscopique associée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général $f_{n+1} - f_n$.*

On a alors, par exemple, la propriété suivante.

Propriété 1.4.19 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble $X \neq \emptyset$ à valeurs dans un espace de Banach Y. Supposons qu'il existe une suite $(M_k) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| \leq M_k$$

et la série de terme général M_k converge. Alors la suite f_n converge uniformément sur X.

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Weierstrass (propriétés 1.4.15 et 1.4.16) à la série téléscopique associée à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de remarquer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \sum_{k=0}^{n} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) = f_{n+1}(x) - f_0(x). \tag{1.9}$$

■

Remarque 1.4.20 *C'est sans doute en observant l'identité (1.9) que l'on comprend le mieux le terme "téléscopique" choisi pour nommer la série de terme général $(f_{n+1} - f_n)$.*

1.4.3 Le critère d'Abel

Nous allons faire un rappel concernant le critère d'Abel sur les *séries* à valeurs dans un espace de Banach avant de voir comment celui-ci s'étend aux *séries de fonctions* à valeurs dans un espace de Banach. Juste avant cela, exprimons quelle peut être l'utilité du critère d'Abel dans chacun de ces deux cas. Pour les séries à valeurs dans un Banach, le critère d'Abel est une condition suffisante pour avoir de la convergence en montrant que les sommes partielles sont de Cauchy, notamment dans des cas où la convergence n'est pas absolue, et sans pour autant faire apparaître effectivement la somme de la série. Pour les séries de fonctions à valeurs dans un Banach, le critère d'Abel sera une condition suffisante pour avoir de la convergence uniforme en montrant que les sommes partielles sont uniformément de Cauchy, notamment dans des cas où la convergence n'est pas normale, et sans pour autant faire intervenir explicitement la somme de la série.

Propriété 1.4.21 *Soit Y un espace de Banach. Considérons une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de Y qui est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont bornées :*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k \right\| \leq M.$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive, décroissante et tendant vers 0. Alors la série de terme général $f_n g_n$ converge dans Y.

Preuve. Notons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_k \qquad \text{et} \qquad G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k.$$

Puisque Y est complet, il suffit de montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. Pour cela, effectuons une transformation d'Abel sur la différence entre deux sommes partielles de cette série : pour $n, p \in \mathbb{N}^\star$, écrivons

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k (G_k - G_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_{k-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k G_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1} G_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} f_k G_k + f_{n+p} G_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} f_{k+1} G_k - f_n G_n, \end{aligned}$$

pour finalement obtenir que

$$S_{n+p} - S_n = f_{n+p} G_{n+p} - f_n G_n + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1}) G_k. \tag{1.10}$$

Par positivité et décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et par inégalité triangulaire, il vient

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq f_{n+p}\|G_{n+p}\| + f_n\|G_n\| + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1})\|G_k\|.$$

La suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant majorée par M par hypothèse, on en déduit

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq f_{n+p}M + f_n M + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_k - f_{k+1}).$$

Puisque la dernière somme est téléscopique et par décroissance de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star, \qquad \|S_{n+p} - S_n\| \leq M f_{n+p} + M f_n + M(f_{n+1} - f_{n+p}) \leq 2M f_n. \tag{1.11}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n \leq \varepsilon/(2M)$. On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \qquad \|S_{n+p} - S_n\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, donc elle converge dans Y puisque Y est complet par hypothèse. ∎

Remarque 1.4.22 *L'identité* (1.10) *est appelée transformation d'Abel. Remarquons l'analogie entre cette formule et la formule d'intégration par parties pour deux fonctions G et f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, en notant $S = fG'$:*

$$\int_a^b S(t)\mathrm{d}t = \int_a^b fG'(t)\mathrm{d}t = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'G(t)\mathrm{d}t.$$

Il suffit de remplacer formellement l'opération d'intégration (de symbole $\int$) et l'opération de sommation (de symbole Σ), et de remplacer l'opération de dérivation (de symbole $'$) en l'opération de passage à la série téléscopique associée : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (f_{n+1} - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut également faire attention aux bornes d'intégration et de sommation.

On peut désormais énoncer un critère d'Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions à valeurs dans un Banach, directement adapté de celui rappelé ci-dessus.

Théorème 1.4.23 *Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble et Y un espace de Banach. On se donne une suite de fonctions $g_n : X \to Y$ dont les sommes partielles sont uniformément bornées sur X :*

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, \qquad \left\| \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \right\| \leq M. \tag{1.12}$$

et une suite décroissante de fonctions réelles positives $f_n : X \to \mathbb{R}^+$ qui converge uniformément vers la fonction nulle sur X. Alors la série de fonctions de terme général $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X.

Preuve. Observons que l'hypothèse (1.12) assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in B(X, Y)$. Étendant les notations de la propriété précédente, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)g_k(x) \qquad \text{et} \qquad G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Reprenant la preuve précédente jusqu'à la relation (1.11), on obtient facilement en évaluant les fonctions en $x \in X$:

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in X, \qquad \|S_{n+p}(x) - S_n(x)\| \leq 2M f_n(x).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$ et tout $x \in X$, $f_n(x) \leq \varepsilon/(2M)$. On en déduit que

$$\forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|S_{n+p} - S_n\|_{\infty,X} \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X. Par la propriété 1.2.14, elle converge uniformément sur X. ■

1.4.4 Une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}$, et nulle part dérivable

Un des intérêts de pouvoir manipuler des fonctions définies comme des sommes de séries de fonctions est sans doute de pouvoir sortir de la classe des fonctions obtenues en appliquant aux fonctions usuelles (polynômes, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, etc) un nombre fini d'opérations (combinaisons linéaires, produits, quotients, inversions, compositions, etc), afin de créer des objets dont la simple existence peut être surprenante (surtout la première fois). Nous proposons ici un exemple explicite de fonction obtenue comme la somme d'une série qui converge sur $\mathbb{R}$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle par dérivable sur $\mathbb{R}$.

Désignons par φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire, continue et 2-périodique telle que

$$\forall x \in [0,1], \qquad \varphi(x) = x,$$

et posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x).$$

Observons que la fonction φ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, de constante 1.

Propriété 1.4.24 *La série définissant f converge normalement sur $\mathbb{R}$. Puisque le terme général est continu sur $\mathbb{R}$, la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ également. De plus, la fonction f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Pour montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser le critère de Weierstrass et remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)\right| \leq \left|\frac{3}{4}\right|^k.$$

On en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}$ avec la propriété 1.2.9.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Observons que si f est dérivable en x, alors quelles que soient les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]-\infty, x]^{\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]x, +\infty[^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x, on a quand n tend vers $+\infty$,

$$f(\beta_n) = f(x) + (\beta_n - x)f'(x) + o((\beta_n - x))$$

et de même

$$f(\alpha_n) = f(x) + (\alpha_n - x)f'(x) + o((x - \alpha_n)).$$

Par soustraction, il vient en remarquant que tout terme négligeable devant $(\beta_n - x)$ ou $(x - \alpha_n)$ l'est devant $(\beta_n - \alpha_n)$,

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = (\beta_n - \alpha_n)f'(x) + o((\beta_n - \alpha)).$$

On en déduit que

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f'(x).$$

Afin de montrer que f n'est pas dérivable en x, nous allons construire deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, c'est-à-dire tendant vers x par valeurs respectivement inférieures et strictement supérieures, convergeant vers x, mais telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right| \geq \frac{3^n}{2}. \tag{1.14}$$

Fixons donc $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par p la partie entière de $4^n x$: c'est le seul élément de $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$p \leq 4^n x < p + 1.$$

Posons maintenant

$$\alpha_n = 4^{-n} p \qquad \text{et} \qquad \beta_n = 4^{-n}(p+1),$$

de sorte que

$$\alpha_n \leq x < \beta_n,$$

et $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$. On en déduit que

$$\alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \qquad \text{et} \qquad \beta_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Big(\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)\Big).$$

Observons que, par 2-périodicité de φ, les termes d'indice $k > n$ sont nuls dans la somme ci-dessus. Pour $k < n$, on a avec le caractère 1-lipschtizien de φ :

$$|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)| \leq 4^{k-n}(p+1) - 4^{k-n} = 4^{k-n}.$$

Enfin, pour $k = n$, on a

$$|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)| = 1.$$

Ainsi, par inégalité triangulaire inverse, on a

$$\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Big|\varphi(4^{k-n}(p+1)) - \varphi(4^{k-n}p)\Big| \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k 4^{k-n} \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4^n}\frac{3^n - 1}{3 - 1} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Divisant par $\beta_n - \alpha_n = 4^{-n}$, il vient (1.14). On conclut que f n'est pas dérivable en x. ■

1.5 Séries de puissances

Définition 1.5.1 *On appelle série de puissances (ou parfois, série entière) toute série de fonctions de $X = \mathbb{R}$ ou $X = \mathbb{C}$ dans un X-espace vectoriel normé complet Y dont le terme général est de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & a_n(x - x_0)^n \end{pmatrix},$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ et $x_0 \in X$ sont donnés.

Remarque 1.5.2 *La notation $a_n(x - x_0)^n$ désigne exceptionnellement la multiplication du vecteur Y par le scalaire $(x - x_0)^n$. Cette notation est motivée par le fait qu'elle est naturelle dans le cas où $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1.5.1 Limites supérieures de suites réelles positives

On note $\overline{\mathbb{R}}^+$ l'ensemble $\mathbb{R}^+$ auquel on ajoute un élément noté $+\infty$. On prolonge la relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}^+$ à $\overline{\mathbb{R}}^+$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^+, \qquad x \leq +\infty.$$

On prolonge également la relation $<$ en posant

$$\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}^+, \qquad (x < y) \Longleftrightarrow (x \leq y \ \text{ et } \ x \neq y).$$

Définition 1.5.3 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Définissons sa limite supérieure. On définit tout d'abord la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{+\mathbb{N}}$ en posant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sup_{k \geq n} a_k,$$

avec la convention que α_n vaut $+\infty$ lorsque la suite $(a_k)_{k\geq n}$ n'est pas majorée, et vaut le plus petit des majorants dans $\mathbb{R}$ de la suite $(a_k)_{k\geq n}$ dans le cas contraire. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Distinguons deux possibilités mutuellement exclusives :

— *soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = +\infty$, et dans ce cas on pose*

$$\limsup a_n = +\infty.$$

— *soit il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$, et dans ce cas, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle à partir d'un certain rang, décroissante, minorée par 0. En particulier, elle converge dans $\mathbb{R}^+$. Dans ce cas, on pose*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n.$$

Remarque 1.5.4 *Ce second cas est exactement le cas où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (ce qui équivaut à dire qu'elle est majorée). Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet des valeurs d'adhérence dans $\mathbb{R}^+$, et le réel $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ est la plus grande de ces valeurs d'adhérence.*

Définition 1.5.5 *Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}^+$, on pose*

$$\frac{1}{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Remarque 1.5.6 *Toute suite réelle positive $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ et la notation $\frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} a_n}$ désigne un élément bien défini de $\overline{\mathbb{R}}^+$.*

1.5.2 Théorie du rayon

L'étude des séries de puissances est grandement facilitée par l'introduction de la notion de rayon :

Définition 1.5.7 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances. On définit un élément R de $\overline{\mathbb{R}}^+$ appelé* rayon *de la série de puissances en posant*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|^{1/n}}.$$

En effet, du point de vue de la convergence simple, le rayon se caractérise (et décrit une partie du comportement de la série de puissances) comme suit :

Propriété 1.5.8 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances. Son rayon R est l'unique élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ tel que*

- *pour tout $x \in X$ tel que $|x-x_0| < R$, la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge absolument dans Y.*
- *pour tout $x \in X$ tel que $|x-x_0| > R$, la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$ diverge grossièrement.*

Preuve. Vérifions que R est effectivement un élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ ayant les deux propriétés annoncées. L'unicité d'un tel élément est laissée au lecteur.
Commençons par montrer la première propriété. Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $R > 0$. Soit $x \in X$ tel que $|x-x_0| < R$. Choisissons $R' > 0$ tel que $|x-x_0| < R' < R$, c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{R} < \frac{1}{R'} < \frac{1}{|x-x_0|}.$$

Puisque, par définition du rayon,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \|a_n\|^{1/n},$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|a_n\|^{1/n} \leq \frac{1}{R'}.$$

On en déduit pour $n \geq N$,

$$\|a_n\| \leq \frac{1}{(R')^n},$$

puis

$$\|a_n(x-x_0)^n\| = \|a_n\||x-x_0|^n \leq \left(\frac{|x-x_0|}{R'}\right)^n.$$

Puisque

$$\frac{|x-x_0|}{R'} < 1,$$

on conclut à la convergence absolue de la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$.
Montrons maintenant la seconde propriété. Si $R = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $R \in \mathbb{R}^+$, et considérons $x \in X$ tel que $|x-x_0| > R$. Soit $R' > 0$ tel que $R < R' < |x-x_0|$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{|x-x_0|} < \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}.$$

Par définition du rayon, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{R'} \leq \|a_n\|^{1/n}\}$ est infini. On en déduit l'existence d'une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^\star$, strictement croissante, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{R'} \leq \|a_{\varphi(n)}\|^{1/\varphi(n)}.$$

Par suite, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\frac{|x-x_0|}{R'}\right)^{\varphi(n)} \leq \|a_{\varphi(n)}\||x-x_0|^{\varphi(n)} = \|a_{\varphi(n)}(x-x_0)^{\varphi(n)}\|$$

Puisque $1 < |x-x_0|/R'$, il vient que $\|a_{\varphi(n)}(x-x_0)^{\varphi(n)}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$ diverge grossièrement. ■

Outre la convergence ponctuelle, le rayon d'une série de puissances donne des informations sur la convergence de la série en tant que série de fonctions.

Théorème 1.5.9 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ strictement positif. Distinguons deux cas :*

- *si R est fini, alors pour tout $\varepsilon \in]0, R[$, la série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(0, R-\varepsilon]$.*
- *si R est infini, alors pour tout $R_0 \in \mathbb{R}_+^\star$, la série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(0, R_0]$.*

Preuve. Distinguons les deux cas. Supposons dans un premier temps que R est (strictement positif et) fini. Soit $\varepsilon \in]0, R[$. Observons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B(x_0, R-\varepsilon], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y \leq \|a_n\|_Y (R-\varepsilon)^n. \tag{1.15}$$

Par définition du rayon, celui de la série de puissances de terme général $\|a_n\|_Y x^n$ est également R. D'après la propriété 1.5.8 appliquée à cette dernière série, la série numérique de terme général $\|a_n\|_Y(R-\varepsilon)^n$ converge simplement. Par le critère de Weierstrass, avec l'inégalité (1.15), on conclut à la convergence normale de la série de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x_0, R-\varepsilon]$.
Supposons maintenant que $R = +\infty$. Soit $R_0 > 0$ un nombre réel. Comme précédemment, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in B(x_0, R_0], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y \leq \|a_n\|_Y R_0^n.$$

Le rayon de la série de puissances de terme général $\|a_n\|_Y x^n$ est R, donc la série de terme général $\|a_n\|_Y R_0^n$ converge simplement. Le critère de Weierstrass assure finalement que la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R_0]$. ■

On peut étendre la définition 1.1.16 en posant

$$\forall x_0 \in X, \qquad B(x_0, +\infty) = X.$$

Le corollaire suivant reformule simplement le théorème ci-dessus.

Corollaire 1.5.10 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ strictement positif. La série de fonctions de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur les compacts de $B(x_0, R)$.*

Preuve. Dans le cas où R est fini, si K est un compact de $B(x_0, R)$, alors il existe $\varepsilon \in]0, R[$ tel que $K \subset B(x, R-\varepsilon]$. La convergence normale de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x, R-\varepsilon]$ assurée par le théorème 1.5.9 implique la convergence normale de cette même série de puissances sur K.
Dans le cas où $R = +\infty$, si K est un compact de $B(x_0, R) = X$, alors il existe $R_0 > 0$ tel que $K \subset B(x_0, R_0]$. La convergence normale de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x, R_0]$ assurée par le théorème 1.5.9 implique la convergence normale de cette même série de puissances sur K. ■

Définition 1.5.11 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'un série de puissances. Notons $R \in \overline{\mathbb{R}}^+$ son rayon. Lorsque $R > 0$, on appelle* disque ouvert de convergence *de la série de puissances l'ensemble $B(x_0, R)$.*

Remarque 1.5.12 *Le corollaire 1.5.10 signifie donc qu'une série de puissances de rayon $R > 0$ converge normalement (donc uniformément, car $(Y, \|\cdot\|)$ est complet et l'on peut appliquer la proposition 1.4.16) sur les compacts de son disque ouvert de convergence*

Une conséquence importante de ce fait est la continuité de la somme d'une série de puissances sur son disque ouvert de convergence.

Corollaire 1.5.13 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon $R > 0$. La somme S de cette série est définie et continue sur le disque ouvert de convergence de la série de puissances.*

Preuve. Par la propriété 1.5.8, la somme S est bien définie sur $B(x_0, R)$. De plus, la convergence de la série de puissances est uniforme sur les compacts de $B(x_0, R)$ par le corollaire 1.5.10. Puisque $B(x_0, R)$ est un ouvert de X et puisque X est un X-espace vectoriel de dimension finie (égale à 1), on peut appliquer la proposition 1.2.21 pour conclure que S est continue sur $B(x_0, R)$. ■

Remarque 1.5.14 *Nous verrons que, lorsque $R > 0$, la somme S est en fait bien plus régulière sur son disque ouvert de convergence : lorsque $X = \mathbb{R}$, elle est de classe C^∞ sur $B(x_0, R) =]x_0 - R, x_0 + R[$, comme nous le verrons en ? ? ?; lorsque $X = Y$, elle est en fait* holomorphe *(c'est-à-dire de classe C^1 comme fonction d'une variable complexe) sur $B(x_0, R)$. Cette notion sera étudiée plus en détails au chapitre ? ? ?.*

1.5.3 Étude au bord du disque ouvert de convergence

Présentons maintenant deux résultats qui, sous réserve d'une hypothèse de convergence au bord du disque, donnent des informations sur la convergence au sens des séries de fonctions. Le premier résultat suppose de la convergence absolue en un point du bord, le second uniquement de la convergence ponctuelle en un point du bord.

Pour $x_0 \in X$ et $R \in]0, +\infty[$, on note

$$\mathcal{C}(x_0, R) = \{x \in X \mid |x - x_0| = R\},$$

le cercle de centre x_0 et de rayon R.

Théorème 1.5.15 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon R. Supposons que $R \in]0, +\infty[$. S'il existe $y \in \mathcal{C}(x_o, r)$ tel que la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ converge absolument, alors la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge normalement sur $B(x_0, R]$.*

Preuve. Il suffit d'observer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad , \forall x \in B(x_0, R], \qquad \|a_n(x-x_0)^n\|_Y = \|a_n\|_Y |x-x_0|^n \leq \|a_n\|_Y R^n = \|a_n(y-x_0)\|_Y.$$

Puisque ce dernier terme est le terme général d'une série numérique convergente par hypothèse et ne dépend pas de x, le critère de Weierstrass assure la convergence normale de la a série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $B(x_0, R]$. ∎

Théorème 1.5.16 *Soit $a_n(x-x_0)^n$ le terme général d'une série de puissances de rayon R. Supposons que $R \in]0, +\infty[$. S'il existe $y \in \mathcal{C}(x_0, R)$ tel que la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ converge, alors la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ converge uniformément sur le segment reliant x_0 à y.*

Preuve. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $y = x_0 + Re^{i\theta}$. Paramétrons le segment reliant x_0 à y par

$$t \mapsto x(t) := (1-t)x_0 + ty = x_0 + tRe^{i\theta},$$

pour $t \in [0, 1]$. Observons qu'alors,

$$\forall t \in [0, 1], \qquad a_n(x(t) - x_0)^n = t^n R^n e^{in\theta}.$$

L'hypothèse de convergence de la série de terme général $a_n(y-x_0)^n$ implique donc que la suite

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k R^k e^{ik\theta},$$

converge. En particulier, cette suite est de Cauchy dans Y. Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|s_{n+p} - s_n\|_Y \leq \varepsilon.$$

Afin d'appliquer le critère de Cauchy uniforme (propriété 1.2.14), nous allons, pour n et p comme ci-dessus et $t \in [0,1]$, effectuer une transormation d'Abel sur la somme

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x(t)-x_0)^k &= \sum_{k=n}^{n+p} a_k(y-x_0)^k \left(\frac{x(t)-x_0}{y-x_0}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} a_k R^k e^{ik\theta} \left(\frac{tRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}}\right)^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{k-1}) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1} - (s_{k-1} - s_{n-1})) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1}) t^k - \sum_{k=n}^{n+p} (s_{k-1} - s_{n-1}) t^k \\
&= \sum_{k=n}^{n+p} (s_k - s_{n-1}) t^k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1}) t^{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})(t^k - t^{k+1}) + (s_{n+p} - s_{n-1}) t^{n+p} - \underbrace{(s_{n-1} - s_{n-1}) t^n}_{=0} \\
&= \sum_{k=n}^{n+p-1} (s_k - s_{n-1})(t^k - t^{k+1}) + (s_{n+p} - s_{n-1}) t^{n+p}.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=n}^{n+p} a_k(x(t)-x_0)^k \right\|_Y &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|(s_k - s_{n-1}) \underbrace{(t^k - t^{k+1})}_{\geq 0} \| + \|(s_{n+p} - s_{n-1}) t^{n+p}\|_Y \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|(s_k - s_{n-1})\|_Y (t^k - t^{k+1}) + \|(s_{n+p} - s_{n-1})\|_Y |t|^{n+p} \\
&\leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \varepsilon (t^k - t^{k+1}) + \varepsilon t^{n+p} \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=n}^{n+p-1} (t^k - t^{k+1}) + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon (t^n - t^{n+p}) + \varepsilon t^{n+p} \\
&\leq \varepsilon \underbrace{t^n}_{\leq 1} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

À l'aide du critère de Cauchy uniforme, ceci démontre que la série de fonctions de terme général $a_n(x(t)-x_0)^n$ converge uniformément sur $[0,1]$. ■

Nous allons maintenant donner une application de ce résultat de convergence radial aux séries numériques ($Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{C}$). Commençons par un rappel du cours de CDI1.

Définition 1.5.17 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le produit de Cauchy de ces suites est par définition la suite de terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Propriété 1.5.18 *Si les séries numériques de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent absolument dans $\mathbb{C}$, alors le produit de Cauchy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ces deux séries est le terme général d'une série numérique convergente et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Preuve. Voir le cours de CDI1. ■

Le résultat de convergence radial (théorème 1.5.16) permet de démontrer le résultat plus fin suivant.

Théorème 1.5.19 *Si les séries numériques de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\mathbb{C}$, et si leur produit de Cauchy $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi le terme général d'une série convergente, alors on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Remarque 1.5.20 *On affaiblit l'hypothèse de convergence absolue en une simple hypothèse de convergence des séries de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on ajoute l'hypothèse de convergence de la série produit de Cauchy pour avoir finalement la même formule.*

Preuve. On définit les séries de puissances

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \text{et} \quad C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

Puisque la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a $R_A := R(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) \geq 1$. De même, on a $R_B := R(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n) \geq 1$ et $R_C := R(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n) \geq 1$ Si $R_A > 1$ alors la fonction A est définie et continue sur $[0, R_A[$ par le corollaire 1.5.13, donc en particulier sur $[0, 1]$. Sinon, $R_A = 1$ et la fonction A est également continue sur $[0, 1]$ par le théorème 1.5.16. De même, on montre que les fonctions B et C sont continues sur $[0, 1]$. En outre, pour tout $x \in [0, 1[$, on a, avec la propriété 1.5.18 appliquée aux séries de terme général $a_n x^n$ et $b_n x^n$ dont le terme général du produit de Cauchy est $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = c_n x^n$ la relation

$$C(x) = A(x)B(x).$$

Puisque les fonctions A, B et C sont continues sur $[0, 1]$, on en déduit en faisant tendre x vers 1 par valeurs inférieures dans l'égalité précédente

$$C(1) = A(1)B(1),$$

qui est exactement la relation souhaitée. ■

1.5.4 Fonctions réelles-analytiques

On se donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace de Banach Y (par exemple $Y=\mathbb{R}$ ou $Y=\mathbb{C}$), x_0 un nombre réel et l'on s'intéresse à la somme de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ de la variable *réelle* x.

Définition 1.5.21 *On appelle série de puissances dérivée formelle de la série de puissances de terme général* $na_n(x-x_0)^{n-1}$.

Propriété 1.5.22 *Le rayon de la série de puissances de terme général* $a_n(x-x_0)^n$ *est égal à celui de sa dérivée formelle.*

Preuve. Notons $R\in\overline{\mathbb{R}}^+$ le rayon de la série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ et R' celui de sa dérivée formelle. À l'aide de la définition 1.5.7, on a

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to+\infty}\|a_n\|_Y^{1/n}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{R'}=\limsup_{n\to+\infty}\|na_n\|_Y^{1/(n-1)}.$$

Il suffit alors de remarquer que pour $n\in\mathbb{N}^\star$, on a

$$\|na_n\|_Y^{1/(n-1)}=n^{1/(n-1)}\left(\|a_n\|^{1/n}\right)^{n/(n-1)}.$$

Puisque

$$n^{1/(n-1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1\qquad\text{et}\qquad\frac{n}{n-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1,$$

il vient que $R=R'$. ∎

Corollaire 1.5.23 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* Y *telle que le rayon de la série de puissances de terme général* a_nz^n *est* $R>0$. *La somme* S *de la série de puissances de terme général* $a_n(x-x_0)^n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]x_0-R,x_0+R[$. *De plus*

$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \forall x\in]x_0-R,x_0+R[,\qquad S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Preuve. La démonstration se fait par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^\star$. Pour l'initialisation, on remarque que la série dérivée formelle de terme général $na_n(x-x_0)^{n-1}$ est la dérivée terme à terme de la série de terme général a_nx^n, par définition. D'après la propriété précédente, le rayon de la série dérivée formelle est R. Par le corollaire 1.5.10, cette série de puissances converge uniformément sur les compacts de $B(x_0,R[$, donc en particulier sur les compacts de $]x_0-R,x_o+R[$. Enfin, par le théorème de dérivation des séries de fonctions, on conclut que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_0-R,x_0+R[$, et l'on a

$$\forall x\in]x_0-R,x_0+R[,\qquad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

L'hérédité est laissée au lecteur. ∎

Corollaire 1.5.24 *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* Y *telle que le rayon de la série de puissances de terme général* a_nz^n *est* $R>0$. *Notons* S *la somme de la série de puissances de terme général* $a_n(x-x_0)^n$. *On a*

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad a_k=\frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $S(x_0) = a_0$ et, de même, avec le corollaire précédent,

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \qquad S^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n \underbrace{(x_0-x_0)^{n-k}}_{=0 \text{ si } n-k\geq 1} = k!a_k.$$

■

Remarque 1.5.25 *Ce corollaire assure une forme d'unicité des coefficients des séries de puissances : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de Y. Notons R_A et R_B les rayons respectifs des séries de terme général $a_n(x-x_0)^n$ et $b_n(x-x_0)^n$. Supposons que R_A et R_B sont strictement positifs et qu'il existe $r \in]0, \min(R_A, R_B)[$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_n,$$

et par suite $R_A = R_B$.

Définition 1.5.26 *Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert, et f une fonction de U dans le Banach Y. On dit que la fonction f est réelle-analytique sur U lorsque pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est la somme d'une série de puissances de terme général $a_n(x-x_0)^n$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions réelles analytiques sur U à valeurs dans le Banach Y.*

Remarque 1.5.27 *De manière équivalente, par le corollaire 1.5.24, la fonction f est réelle-analytique sur U si pour tout $x_0 \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série de Taylor de f converge simplement vers f sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.*

Propriété 1.5.28 *On a l'inclusion*

$$\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{C}^\infty(U, Y).$$

De plus, lorsque $U \neq \emptyset$ et $Y \neq \{0\}$, l'inclusion est stricte.

Preuve. L'inclusion est évidente car une fonction de $\mathcal{A}(U)$ est somme d'une série de puissances au voisinage de tout point de U, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de tout point de U. De plus, lorsque $U \neq \emptyset$, il contient un certain intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $x_0 \in U$ et $\varepsilon > 0$. Sur cet intervalle, si y est un vecteur non nul de Y, la fonction

$$f : \begin{pmatrix} U & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-1/(x-x_0)}\, y & \text{si } x > x_0 \\ 0\, y & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix},$$

est dans $\mathcal{C}^\infty(U, Y)$ (ce fait est laissé en exercice) mais pas dans $\mathcal{A}(U)$. En effet, ses dérivées successives en 0 sont identiquement nulles. Si elle était dans $\mathcal{A}(U)$, elle serait nulle sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas. ■

1.6 Séries de Fourier

1.6.1 Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Définition 1.6.1 *On note $\mathcal{R}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, Riemann-intégrables sur tout segment de $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.*

Propriété 1.6.2 *L'ensemble $\mathcal{R}_{2\pi}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. C'est également une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour les lois usuelles.*

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 1.6.3 *L'ensemble $\mathcal{R}_{2\pi}$ est l'espace des fonctions 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont Riemann-intégrables sur $[0, 2\pi]$.*

Preuve. Exercice ∎

Propriété 1.6.4 *On note $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}_{2\pi}$.*

Preuve. Exercice ∎

Propriété 1.6.5 *On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques. L'ensemble $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Propriété 1.6.6 *Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note*

$$e_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ikx} \end{pmatrix}.$$

La fonction e_k est un élément de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$T_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left((e_k)_{-n \leq k \leq n}\right),$$

l'espace des polynômes trigonométriques de degré au plus n. C'est un espace vectoriel de dimension finie $2n+1$.

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 1.6.7 *Pour tout $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, et tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, a+2\pi]$ et l'on a*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ∎

Définition 1.6.8 *Pour $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on note*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Propriété 1.6.9 *L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une forme hermitienne sur positive sur $\mathcal{R}_{2\pi}$, et donc par restriction sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. En restriction à $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, c'est une forme hermitienne définie positive. Par suite, l'application*

$$\|\cdot\| : \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x} \end{pmatrix},$$

est une semi-norme sur $\mathcal{R}_{2\pi}$, sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et une norme sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. En particulier, $\left(\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ est un espace préhilbertien complexe.

Preuve. Exercice ■

Définition 1.6.10 *L'application $\|\cdot\|$ est appelée norme (ou semi-norme) en moyenne quadratique.*

Propriété 1.6.11 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ forment une base orthonormée de T_n.*

Preuve. Exercice ■

Propriété 1.6.12 (Identité du parallélogramme) *On a en particulier*

$$\forall f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}, \qquad \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2. \tag{1.16}$$

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.13 *Si $X \neq \emptyset$ est une partie de $\mathcal{R}_{2\pi}$, on définit son orthogonal*

$$X^\perp = \{y \in \mathcal{R}_{2\pi} \mid \forall x \in X,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}_{2\pi}$.

Preuve. Exercice ■

Définition 1.6.14 *On dit que $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ sont orthogonales lorsque $\langle f, g\rangle = 0$.*

Propriété 1.6.15 (Théorème de Pythagore) *Si $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ sont orthogonales, alors*

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{1.17}$$

Preuve. Exercice ■

Définition 1.6.16 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On définit ses coefficients de Fourier $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ par la formule*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = \langle f, e_k\rangle.$$

1.6.2 Série de Fourier associée à une fonction périodique

Propriété 1.6.17 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction*

$$d_n : \begin{pmatrix} T_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ p & \longmapsto & \|f - p\| \end{pmatrix},$$

admet un unique minimum sur T_n. Ce minimum est appelé projeté orthogonal de f sur T_n. Notons le $p_n(f)$. Il est caractérisé par le fait que

$$p_n(f) \in T_n \qquad et \qquad \forall g \in T_n, \quad \langle f - p_n(f), g \rangle = 0. \tag{1.18}$$

On a par ailleurs la formule

$$p_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k. \tag{1.19}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \geq 0$. La fonction d_n est définie que T_n, à valeurs positives. Elle admet un unique minimum sur T_n si et seulement si d_n^2 admet un unique minimum sur T_n. C'est ce que nous allons montrer. L'ensemble T_n est non-vide et la fonction d_n^2 est positive sur cet ensemble. En particulier, elle est minorée sur cet ensemble et il existe $m_n \geq 0$ et une suite de fonctions $(t_k)_{k \geq 0}$ de T_n telle que

$$d_n^2(t_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} m_n^2 = \inf_{T_n} d_n^2. \tag{1.20}$$

Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, en utilisant l'identité du parallélogramme (1.16) de la propriété 1.6.12, on obtient

$$\begin{aligned} \|t_k - t_\ell\|^2 &= \|\,(f - t_k) - (f - t_\ell)\,\|^2 \\ &= 2\,\|f - t_k\|^2 + 2\,\|f - t_\ell\|^2 - \|2f - t_k - t_\ell\|^2 \\ &= 2\,\|f - t_k\|^2 + 2\,\|f - t_\ell\|^2 - 4\left\|f - \frac{t_k + t_\ell}{2}\right\|^2 \end{aligned}$$

Puisque T_n est un espace vectoriel, on a $(t_k + t_\ell)/2 \in T_n$. Par conséquent, $m_n^2 \leq \left\|f - \frac{t_k + t_\ell}{2}\right\|^2$. On en déduit que, pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\|t_k - t_\ell\|^2 \leq 2d_n^2(t_k) + 2d_n^2(t_\ell) - 4m_n^2. \tag{1.21}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Utilisant (1.20), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N_\varepsilon$, on a $2(d_n^2(t_k) - m_n^2) < \varepsilon^2/2$. Utilisant (1.21), on en déduit que pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N_\varepsilon$ et $\ell \geq N_\varepsilon$, on a

$$\|t_k - t_\ell\| \leq \varepsilon.$$

En particulier, la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(T_n, \|\cdot\|)$. Puisque cet espace vectoriel normé est de dimension finie, il est complet. Par conséquent, la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $t^\star \in T_n$. Par continuité de la norme, ou en utilisant la majoration

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad m_n \leq \|f - t^\star\| \leq \|f - t_k\| + \|t_k - t^\star\|,$$

il vient que $d_n^2(t^\star) = m_n^2$. Ceci démontre que d_n^2 (donc d_n) admet un minimum sur T_n. Montrons que ce minimum est unique en supposant qu'on a une fonction $u \in T_n$ telle que $d_n^2(u) = m_n^2$. Dans ce cas, on a, puisque T_n est un espace vectoriel, que $(u + t^\star)/2 \in T_n$. Ceci implique que

$m_n^2 \leq \left\| f - \frac{u+t^\star}{2} \right\|^2$. Utilisant de nouveau l'identité du parallélogramme (1.16), on obtient

$$\|u - t^\star\|^2 = 2\|f-u\|^2 + 2\|f-t^\star\|^2 - 4\left\| f - \frac{u+t^\star}{2} \right\|^2 \leq 2m_n^2 + 2m_n^2 - 4m_n^2.$$

En particylier $u = t^\star$ et ceci démontre l'unicité du minimiseur de d_n^2 (donc de d_n) sur T_n. Notons $p_n(f)$ ce minimiseur. Montrons qu'il vérifie (1.18). D'une part, on a $p_n(f) \in T_n$ par construction. Soit $g \in T_n$. Pour $s \in \mathbb{C}$, posons $h(s) = \|f - p_n(f) - sg\|^2$. Puisque T_n est un espace vectoriel, on a $p_n(f) + sg \in T$. Par conséquent, $h(s) \geq m_n^2$. Or on a

$$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad h(s) = \|f - p_n(f)\|^2 + 2\Re\left(s\langle f - p_n(f), g\rangle\right) + |s|^2\|g\|^2$$

En particulier, on peut prendre s de la forme $t\overline{\langle f - p_n(f), g\rangle}$, où t est un nombre réel. Puisque $\|f - p_n(f)\|^2 = m_n^2$, il vient que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad m_n^2 + 2t\left|\langle f - p_n(f), g\rangle\right|^2 + |t|^2|\langle f - p_n(f), g\rangle|^2\|g\|^2 \geq m_n^2.$$

Ceci impose que le terme d'ordre 1 en t est nul (examiner le comportement du membre de gauche pour t proche de 0). En particulier, on a

$$\langle f - p_n(f), g\rangle = 0.$$

Ainsi, $p_n(f)$ vérifie bien (1.18). Montrons réciproquement que si $u \in T_n$ vérifie

$$\forall g \in T_n, \qquad \langle f - u, g\rangle = 0, \tag{1.22}$$

alors $u = p_n(f)$. Soit $u \in T_n$ vérifiant (1.22). Observons que

$$\begin{aligned} m_n^2 &= \|f - p_n(f)\|^2 \\ &= \|(f-u) + (u - p_n(f))\|^2 \\ &= \|f-u\|^2 + 2\Re\left(\langle f-u, u-p_n(f)\rangle\right) + \|u - p_n(f)\|^2 \\ &= \|f-u\|^2 + \|u-p_n(f)\|^2, \end{aligned}$$

car $\langle f-u, u-p_n(f)\rangle = 0$ car $u - p_n(f) \in T_n$. Ainsi, on a

$$\inf_{T_n} d_n^2 = d_n^2(u) + \|u - p_n(f)\|^2.$$

Ceci implique que $\|u - p_n(f)\|^2 = 0$, donc $u = p_n(f)$. Ainsi, la relation (1.18) caractérise bien $p_n(f)$. Enfin, montrons que $p_n(f)$ est donné par la formule (1.19). Pour cela, avec ce que l'on vient de montrer, il suffit d'observer que $p_n(f) \in T_n$ et que l'on a pour tout $g \in T_n$ $\left\langle f - \sum_{|k|\leq n}\langle f, e_k\rangle e_k, g\right\rangle = 0$, ou, de manière équivalente,

$$\forall \ell \in \{-n, \cdots, n\}, \qquad \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k, e_\ell\right\rangle = 0.$$

Ceci est évident en utilisant la propriété 1.6.11. En effet, pour $\ell \in \{-n, \cdots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle f - \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k, e_\ell\right\rangle &= \langle f, e_\ell\rangle - \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle\langle e_k, e_\ell\rangle \\ &= \langle f, e_\ell\rangle - \langle f, e_\ell\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Définition 1.6.18 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On appelle* série de Fourier associée à f *la série de fonctions de terme général $(u_k)_{k\geq 0}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$u_0(x) = \langle f, e_0\rangle \qquad et \qquad u_k(x) = \langle f, e_{-k}\rangle\, e_{-k}(x) + \langle f, e_k\rangle\, e_k(x).$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ la somme partielle de cette série. Ainsi,

$$\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k(x) = p_n(f)(x).$$

Remarque 1.6.19 *Par définition, pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, la fonction $S_n(f)$ est la meilleure approximation de f par un polynôme trigonométrique de degré au plus n, en moyenne quadratique.*

Propriété 1.6.20 *Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n(f)$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus n. En particulier, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.*

Preuve. Exercice ■

Écrivant pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ que $f = (f - p_n(f)) + p_n(f)$, on a une décomposition de f en somme d'un élément de $T_n^\perp$ et de T_n. Ceci implique que

Propriété 1.6.21 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme directe orthogonale de T_n et de $T_n^\perp$ est égale à $\mathcal{R}_{2\pi}$. Autrement dit*

$$\mathcal{R}_{2\pi} = T_n \overset{\perp}{\oplus} T_n^\perp. \tag{1.23}$$

Preuve. C'est une utilisation de la propriété 1.6.17 et de la décomposition indiquée avant la proposition. ■

Corollaire 1.6.22 *Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|f\|^2 = \|f - p_n(f)\|^2 + \|p_n(f)\|^2. \tag{1.24}$$

Preuve. C'est un corollaire de la décomposition (1.23) et de la relation de Pythagore (1.17). ■

Corollaire 1.6.23 (Inégalité de Bessel) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Preuve. Pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, puisque les $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ forment une base orthonormée de T_n (propriété 1.6.11)

$$\begin{aligned}
\|p_n(f)\|^2 &= \left\langle \sum_{|k|\leq n} c_k(f) e_k, \sum_{|\ell|\leq n} c_\ell(f) e_\ell \right\rangle \\
&= \sum_{|k|\leq n} \sum_{|\ell|\leq n} c_k(f)\overline{c_\ell(f)} \langle e_k, e_\ell\rangle \\
&= \sum_{|k|\leq n} |c_k(f)|^2 .
\end{aligned}$$

Utilisant le corollaire 1.6.22, il vient que

$$\|f\|^2 = \underbrace{\|f - p_n(f)\|^2}_{\geq 0} + \sum_{|k|\leq n} |c_k(f)|^2 .$$

Ceci démontre l'inégalité de Bessel. ■

Corollaire 1.6.24 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. La série de terme général $(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)_{k\geq 1}$ converge. De plus, on a*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right) \leq \|f\|^2. \tag{1.25}$$

Preuve. C'est une série à termes positifs, dont les sommes partielles sont bornées par l'inégalité de Bessel par une quantité finie qui ne dépend pas de n. Elle est donc convergente, et l'on a (1.25) ■

Corollaire 1.6.25 (Lemme de Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a*

$$c_k(f) \underset{|k|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. D'après le corollaire 1.6.24, la série de terme général $|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$ est convergente. En particulier, son terme général tend vers 0. Ceci démontre le lemme de Riemann-Lebesgue. ■

1.6.3 Série de Fourier et dérivation

Propriété 1.6.26 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction f' (définie sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre privé de points ; où on la prolonge par 0 par convention) est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc en particulier dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, et l'on a*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f') = ikc_k(f). \tag{1.26}$$

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}^\star$ et $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_q = 2\pi$ une subdivision du segment $[0, 2\pi]$ adaptée à f, c'est-à-dire telle que pour tout $p \in \{0, \ldots, q-1\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]a_p.a_{p+1}[$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a_p, a_{p+1}]$. Par intégration par parties, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et $q \in \{0, \ldots, q-1\}$

$$\int_{a_p}^{a_{p+1}} f'(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x = f\left(a_{p+1}\right)\mathrm{e}^{-ika_{p+1}} - f\left(a_p\right)\mathrm{e}^{-ika_p} - \int_{a_p}^{a_{p+1}} f(x) \times \left(-ik\mathrm{e}^{-ikx}\right)\mathrm{d}x.$$

Sommant sur q, on obtient

$$\int_{a_0}^{a_q} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\mathrm{d}x = \sum_{q=0}^{q-1} \left(f\left(a_{p+1}\right)\mathrm{e}^{-ika_{p+1}} - f\left(a_p\right)\mathrm{e}^{-ika_p}\right) + ik\int_{a_0}^{a_q} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Puisque $a_0 = 0$ et $a_q = 2\pi$, il vient puisque la somme est téléscopique,

$$\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{ikx}}\mathrm{d}x = f(2\pi)\mathrm{e}^{-2ki\pi} - f(0)\mathrm{e}^{-i0k} + ik\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x.$$

Puisque $\mathrm{e}^{-2ki\pi} = \mathrm{e}^{-i0k} = 1$ et puisque $f(2\pi) = f(0)$ car $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, on obtient (1.26) en divisant l'égalité ci-dessus par 2π. ■

Corollaire 1.6.27 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ qui est de plus $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f^{(p+1)}$ (définie sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre privé de points ; où on la prolonge par 0 par convention) est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, et l'on a*

$$\forall q \in \{0, \ldots, p+1\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \qquad c_k(f^{(q)}) = (ik)^q c_k(f).$$

Preuve. En exercice, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, en utilisant la propriété 1.6.26 pour l'initialisation et l'hérédité. ∎

Corollaire 1.6.28 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ qui est de plus $\mathcal{C}^{p+1}$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$c_k(f) \underset{|k| \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^{p+1}}\right). \tag{1.27}$$

Preuve. Par le corollaire précédent, on a pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$c_k(f) = \frac{1}{(ik)^{p+1}} c_k(f^{(p+1)}).$$

De plus, on a $c_k(f^{(p+1)}) \underset{|k| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue (propriété 1.6.25), car $f^{(p+1)} \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m},2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}_{2\pi}$. ∎

Remarque 1.6.29 *Ce dernier corollaire indique que, plus f est régulière, plus ses coefficients de Fourier tendent vite vers 0 quand $|k|$ tend vers $+\infty$, au sens où l'on a (1.27) pour un nombre plus en plus grand des premiers entiers p.*

Corollaire 1.6.30 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit f une telle fonction. Puisqu'elle est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a par la propriété 1.6.26, pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$|c_k(f)| = \left|\frac{c_k(f')}{ik}\right| = \frac{1}{|k|} \times |c_k(f')| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\left|c_k(f')\right|^2.$$

Observons que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\left|c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx} + c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}\right| \leq |c_{-k}(f)| + |c_k(f)|.$$

Par ailleurs, $|c_0(f)\mathrm{e}^{i0x}| = |c_0(f)|$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|c_{-k}(f)\mathrm{e}^{-ikx} + c_k(f)\mathrm{e}^{ikx}\right| \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\left|c_{-k}(f')\right|^2 + \frac{1}{2}\left|c_k(f')\right|^2.$$

Par le corollaire 1.6.24, que l'on peut appliquer car f' est (2π-périodique et) continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de terme général $|c_{-k}(f')|^2 + |c_k(f')|^2$ converge. Puisque la série de terme général $1/k^2$ converge également, il vient que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$. ∎

Nous verrons en section ? ? ? que la limite de la série de Fourier de f n'est autre que f dans ce cas ci-dessus.

1.6.4 Le théorème de Dirichlet

Lemme 1.6.31 (Un autre lemme de Riemann-Lebesgue) *Soit $a < b$. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Commençons par obsever que le résultat est vrai pour une fonction indicatrice d'un intervalle inclus dans $[a, b]$. Par suite, il est vrai dès que f est une fonction en escalier sur $[a, b]$. Considérons maintenant le cas général où $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Supposons tout d'abord que la fonction f est à valeurs réelles. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$, il existe une fonction en escalier g sur $[a, b]$ telle que $g \leq f$ sur $[a, b]$ et $\int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x < \varepsilon/2$. Puisque g est en escalier sur $[a, b]$, le raisonnement mené en début de preuve assure qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \geq R$, on a

$$\left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| \geq R$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_a^b \left|(f(x) - g(x))\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\right| \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat lorsque $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est à valeurs rélles. Maintenant, en tout généralité, si $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est à valeurs complexes, on écrit $f = u + iv$ avec $u, v \in \mathcal{R}_{2\pi}$ à valeurs réelles. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x) + iv(x))\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x + i\int_a^b v(x)\mathrm{e}^{i\lambda x}\mathrm{d}x,$$

et chacune des deux dernières intégrales tend vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers l'infini d'après la partie précédente de la preuve. On en déduit le résultat pour $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ à valeurs complexes. ■

Remarque 1.6.32 *Deux différences notables dans ce lemme de Riemann-Lebesgue par rapport au lemme 1.6.25 qui porte le même nom. D'une part, la fonction f n'est plus nécessiarement la restriction d'une fonction périodique de période $(b - a)$ à un intervalle de longueur $(b - a)$. D'autre part, la variable réelle dans l'exponentielle de l'intégrande peut maintenant prendre des valeurs continues arbitrairement grandes, alors que seules des valeurs discrètes arbitrairement grandes étaient autorisées dans le lemme 1.6.25.*

Corollaire 1.6.33 *Soit $a < b$. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ à valeurs complexes. On a*

$$\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Preuve. On sépare 2 fois parties rélles et imaginaires pour déduire le résultat du lemme 1.6.31. D'une part, ce lemme 1.6.31 vaut pour les fonctions f continues par morceaux à valeurs rélles. Donc, en séparant parties rélles et imaginaires, on en déduit le corollaire pour les fonctions f continues par morceaux et à valeurs rélles. Pour une fonction à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a, b]$, on sépare de nouveau partie rélle et partie imaginaire (qui sont toutes deux continues par morceaux sur $[a, b]$), et l'on applique le corollaire que l'on vient de montrer à chaque partie pour en déduire le corollaire dans sa généralité. ∎

Remarque 1.6.34 *Alternativement à la preuve ci-dessus, on peut également prouver ce corollaire directement, en modifiant légèrement la preuve du lemme 1.6.31 compte tenu de la définition de l'intégrande, mais en en gardant la trame.*

Lemme 1.6.35 *Soit $a < b$ et $c \in]a, b[$. Soit g une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, qui est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, c[$ comme sur tout segment inclus dans $]c, b]$. Si la fonction g admet une limite finie en c^- et g admet une limite finie en c^+, alors cette fonction est Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$.*

Preuve. Exercice. ∎

Définition 1.6.36 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le noyau de Dirichlet d'ordre n défini pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikx}.$$

Propriété 1.6.37 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction D_n est paire, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, et d'intégrale égale à 2π sur une période. De plus, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \qquad D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin(x/2)}. \tag{1.28}$$

Preuve. Les faits énoncés sur la fonction D_n sont laissés en exercice. Montrons la formule (1.28). Observons que pour $x \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$, on a $\mathrm{e}^{-ix} \neq 1$, de sorte que, en exploitant le caractère géométrique de la somme définissant $D_n(x)$, on a

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \mathrm{e}^{-inx}\frac{1-\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{2n+1}}{1-\mathrm{e}^{ix}} \\
&= \mathrm{e}^{-inx}\frac{1-\mathrm{e}^{i(2n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}} \\
&= \mathrm{e}^{-inx}\frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}}\frac{\mathrm{e}^{-i(2n+1)\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\mathrm{n}+1)\frac{\mathrm{x}/2}{}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

∎

Théorème 1.6.38 (de Dirichlet, version locale) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite finie à gauche et à droite en x, que l'on note respectivement $f(x^-)$ et $f(x^+)$. On suppose de plus que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x au sens suivant : il existe $f'_g(x) \in \mathbb{C}$ et $f'_d(x) \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\frac{f(x-u)-f(x^-)}{-u} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} f'_g(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x+u)-f(x^+)}{u} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} f'_d(x).$$

Dans ce cas, la série de Fourier de f en x converge simplement vers $(f(x^-)+f(x^+))/2$. Autrement dit,

$$S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Preuve. Soit f et x vérifiant les hypothèses. Écrivons que, par définition de $S_n(f)$, on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-ikt}\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}t\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{ik(x-t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{1.29}$$

où l'on a utilisé la linéarité de l'intégrale pour les fonctions de $\mathcal{R}_{2\pi}$, la définition 1.6.36 du noyau de Dirichlet D_n, le théorème de changement de variable, et l'invariance de l'intégrale sur une période de la propriété 1.6.7. Par parité de la fonction D_n sur $\mathbb{R}$, on a également, en continuant le calcul précédent,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(-u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\mathrm{d}u \end{aligned} \tag{1.30}$$

Par ailleurs, puisque D_n est une fonction d'intégrale 2π sur tout intervalle de longueur 2π, on a également

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\right)D_n(u)\mathrm{d}u.$$

Écrivant $S_n(f)(x)$ comme la demi-somme de (1.29) et (1.30), on obtient

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(x-u)-f(x^-)}{2} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2}\right)D_n(u)\mathrm{d}u. \tag{1.31}$$

Nommons $g_{n,x}$ l'intégrande ci-dessus, de sorte que

$$g_{n,x} : \begin{pmatrix} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \left(\frac{f(x-u)-f(x^-)}{2} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2}\right) D_n(u) \end{pmatrix}.$$

Pour $u \in [-\pi,\pi] \setminus \{0\}$, on peut écrire en utilisant la relation (1.28) de la propriété 1.6.37, que $g_{n,x}(u) = h_x(u) \sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)$, où h_x est la fonction

$$h_x : \begin{pmatrix} [-\pi,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x-u)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{f(x+u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{pmatrix}$$

Cette fonction est définie sur le segment $[-\pi,\pi]$, Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$. Par le lemme 1.6.35, il suffit de montrer qu'elle admet une limite finie à gauche et à droite de 0 pour obtenir qu'elle est Riemann-intégrable sur $[-\pi,\pi]$. Or, pour $u \in]0,\pi]$, on a, puisque f admet une dérivée à gauche en x,

$$\frac{f(x-u)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x-u)-f(x^-)}{(x-u)-x} \times \frac{(x-u)-x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} -f'_g(x).$$

De même, on a, puisque f admet une dérivée à droite en x,

$$\frac{f(x+u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x+u)-f(x^+)}{(x+u)-x} \times \frac{(x+u)-x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} f'_d(x).$$

Ainsi,

$$h_x(u) \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} f'_d(x) - f'_g(x).$$

Similairement, pour $u \in [-\pi, 0[$, on peut écrire que

$$h_x(u) = \frac{f(x+u)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} + \frac{f(x-u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

On a comme précédemment, puisque f admet une dérivée à gauche en x,

$$\frac{f(x+u)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x+u)-f(x^+)}{(x+u)-x} \times \frac{(x+u)-x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0^-}{\longrightarrow} f'_g(x),$$

et puisque f admet une dérivée à droite en x,

$$\frac{f(x-u)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(x-u)-f(x^-)}{(x-u)-x} \times \frac{(x-u)-x}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0^-}{\longrightarrow} -f'_d(x).$$

Ceci implique que

$$h_x(u) \underset{u\to 0^-}{\longrightarrow} f'_g(x) - f'_d(x).$$

Finalement, le lemme 1.6.35 permet de conclure que h_x est une fonction Riemann-intégrable sur $[-\pi,\pi]$. Puisque les fonctions $u \mapsto g_{n,x}(u)$ et $u \mapsto h_x(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)$ sont égales sur $[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, elles ont même intégrale sur $[-\pi,\pi]$. Ceci implique en revenant à (1.31) que

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_{n,x}(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_x(u)\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u.$$

Puisque h_x est Riemann-intégrable sur $[-\pi,\pi]$ d'après ce qui précède, le lemme de Riemann-Lebesgue 1.6.31 permet de conclure que cette dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci achève la preuve du théorème de Dirichlet. ■

Remarque 1.6.39 *Dans la preuve du théorème de Dirichlet, nous utilisons abondamment le fait que*

$$\frac{u}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

qui est laissé en exercice au lecteur.

Théorème 1.6.40 (de Dirichlet, version globale) *Soit f une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Dans ce cas*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(f)(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Puisque f est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, le corollaire 1.6.30 assure que la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa limite (uniforme) g. Cette fonction g est en particulier la limite simple de $S_n(f)$ Puisque f est continue, elle admet en tout point x de $\mathbb{R}$ une limite à droite et à gauche en x, qui n'est autre que $f(x)$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, elle admet en tout point une dérivée à droite et à gauche au sens des hypothèses du théorème 1.6.38. Elle vérifie donc toutes les hypothèses de ce théorème en tout point x de $\mathbb{R}$. Ce théorème assure que, en tout point x de $\mathbb{R}$, la suite $S_n(f)(x)$ converge vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = f(x)$. En particulier, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, par unicité de la limite simple, de sorte que $S_n(f)$ converge uniformément vers $g = f$ sur $\mathbb{R}$. ■

1.6.5 Le théorème de Plancherel

La propriété 2.1.7 et la remarque 2.1.13 permettent de montrer le résultat d'approximation suivant.

Lemme 1.6.41 *Soit f une fonction de $\mathcal{R}_{2\pi}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([0,2\pi],\mathbb{C})$ telle que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Preuve. La fonction f est dans $\mathcal{R}_{2\pi}$, donc sa restriction à $[0,2\pi]$ est Riemann-intégrable sur le segment $[0,2\pi]$. Par la remarque 2.1.13, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([0,2\pi],\mathbb{C})$ telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \frac{2\pi\varepsilon}{1 + 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]}} \qquad \text{et} \qquad \|\varphi\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \|f\|_{\infty,[0,2\pi]}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)||f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(|f(x)| + |\varphi(x)|\right) |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]} \frac{2\pi\varepsilon}{1 + 2\|f\|_{\infty,[0,2\pi]}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.6.42 *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction continue u sur $[0,2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, telle que $u(0) = u(2\pi)$ et*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u(x)|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([0,2\pi],\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Soit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = 2\pi$ une subdivision adaptée à φ, c'est-à-dire telle que φ est constante, égale à un certain $\lambda_i \in \mathbb{C}$, sur chaque sous-intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ pour $i \in \{1, \cdots, p\}$. Posons $\delta_0 = \max_{1\leq i\leq p}(a_i - a_{i-1})$. Observons que $\delta_0 > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $n \geq 4/\delta_0$, définissons la fonction u_n comme suit :

— pour $x \in [a_0, a_0 + 1/n[$, on pose $u_n(x) = \varphi(0) + nx(\lambda_1 - \varphi(0))$;

— pour $x \in [a_0 + 1/n, a_1 - 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_1$;

— pour $x \in [a_i - 1/n, a_i + 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_i + \frac{n}{2}(x - a_i + 1/n)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ pour $1 \leq i \leq p-1$;

— pour $x \in [a_i + 1/n, a_{i+1} - 1/n[$, on pose $u_n(x) = \lambda_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq p-1$;

— pour $x \in [a_p - 1/n, a_p]$, on pose $u_n(x) = \lambda_p + n(x - a_p + 1/n)(\varphi(0) - \lambda_p)$.

Observons que u_n est une fonction continue sur $[0,2\pi]$, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,2\pi]$, car elle est continue et affine par morceaux sur ce segment. De plus, elle vérifie $u_n(0) = \varphi(0) = u_n(2\pi)$. De plus, on a $\|u_n\|_{\infty,[0,2\pi]} \leq \|\varphi\|_{\infty,[0,2\pi]}$. Estimons maintenant pour tout $n \geq 4/\delta_0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{p} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} \left(|\varphi(x)| + |u_n(x)|\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} \left(|\varphi(x)| + |u_n(x)|\right)^2 \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} \left(\int_{a_{k-1}}^{a_{k-1}+1/n} 4\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x + \int_{a_k - 1/n}^{a_k} 4\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x \right) \\
&\leq \frac{8p}{n} \|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]}.
\end{aligned}$$

Choisissons maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$ de sorte que $n \geq 4/\delta_0$ et $4p\|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]}/(n\pi) < \varepsilon$. Pour un tel n, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - u_n(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{4p}{n\pi} \|\varphi\|^2_{\infty,[0,2\pi]} < \varepsilon,$$

de sorte que la fonction $u = u_n$ vérifie la conclusion du lemme. ■

Avec les deux lemmes d'approximation précédents, on peut démontrer le théorème suivant, qui précise que l'inégalité de Bessel du corollaire 1.6.23 est en fait une égalité.

Théorème 1.6.43 (Identité de Plancherel pour les séries de Fourier) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a l'identité*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 .$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. On a déjà justifié lors de la preuve de l'inégalité de Bessel (corollaire 1.6.23), que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{|k| \leq n} |c_k(f)|^2 .$$

Montrer le théorème revient donc à montrer que $\|f - S_n(f)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Fixons donc $\varepsilon > 0$. Par le lemme 1.6.41, il existe $g \in \mathcal{E}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon/3$. Par le lemme 1.6.42, il existe une fonction h continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ avec $h(0) = h(2\pi)$ telle que $\|g - h\| < \varepsilon/3$. Puisque $h(0) = h(2\pi)$, on peut prolonger h (de manière unique) en une fonction 2π-périodique $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Notons toujours h ce prolongement. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Dirichlet global (théorème 1.6.40), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|h - S_n(h)\|_{\infty,\mathbb{R}} < \varepsilon/3$. Utilisant la propriété de minimisation de la norme qui définit la projection orthogonale (propriété 1.6.17), on peut écrire pour $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{array}{rcl}
\|f - S_n(f)\| & \leq & \|f - S_n(h)\| \\
& \leq & \|f - g\| + \|g - h\| + \|h - S_n(h)\| \\
& \leq & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |h(x) - S_n(h)(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq & \dfrac{2}{3}\varepsilon + \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \|h - S_n(h)\|^2_{\infty,[0,2\pi]} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq & \dfrac{2}{3}\varepsilon + \|h - S_n(h)\|_{\infty,[0,2\pi]} \\
& < & \varepsilon.
\end{array}$$

■

Remarque 1.6.44 *On a montré dans le théorème précédent que la série de Fourier d'une fonction f de $\mathcal{R}_{2\pi}$ converge toujours vers la fonction f* en moyenne quadratique, *c'est-à-dire que*

$$\forall f \in \mathcal{R}_{2\pi}, \qquad S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}} f.$$

Ce résultat de convergence n'implique en particulier pas la convergence ponctuelle de $S_n(f)$ vers f. En revanche, en ajoutant des hypothèses supplémentaires sur f, on peut avoir des résultats de convergence ponctuelle sur $S_n(f)$ (voir le théorème 1.6.38 de Dirichlet local). De même, avec encore des hypothèses supplémentaires sur f, on peut avoir des résultats de convergence uniforme de $S_n(f)$ (voir le théorème 1.6.40 de Dirichlet global).

1.6.6 Coefficients de Fourier réels

Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont appelés coefficients de Fourier complexes, ou exponentiels. Alternativement, on peut définir les coefficients de Fourier réels, ou trigonométriques, $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$ définis comme suit.

Définition 1.6.45 *Soit $f \in \mathbb{R}_{2\pi}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

et pour $n \geq 1$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x.$$

Propriété 1.6.46 *Observons que pour tout $n \geq 1$, les fonctions $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ et $(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq 1 \leq n}$ forment une base de T_n en tant qu'espace vectoriel complexe.*

Preuve. Exercice. ■

Un des avantages des coefficients de Fourier trigonométriques est qu'ils sont réels lorsque la fonction $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ est à valeurs réelles.

Propriété 1.6.47 *On a les relations suivantes entre les coefficients de Fourier trigonométriques et les coefficients de Fourier réels :*

$$\forall n \geq 1, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2} \left(a_n(f) - i b_n(f) \right) \qquad \textit{et} \qquad c_{-n}(f) = \frac{1}{2} \left(a_n(f) + i b_n(f) \right)$$

De plus, $c_0(f) = a_0(f)/2$. Réciproquement, on a

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f),$$

et

$$\forall n \geq 1, \qquad b_n(f) = -i \left(c_{-n}(f) - c_n(f) \right).$$

Preuve. Exercice. ■

On peut écrire la série de Fourier d'une fonction périodique à l'aide des coefficients de Fourier réels.

Propriété 1.6.48 *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) \right).$$

On peut traduire les propriétés de la projection orthogonale avec les coefficients de Fourier trigonométriques comme suit.

Propriété 1.6.49 (inégalité de Bessel avec les coefficients de Fourier trigonométriques) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|S_n(f)\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \right) \leq \|f\|^2.$$

Preuve. Exercice. ■

Propriété 1.6.50 (identité de Parseval avec les coefficients de Fourier trigonométriques) *Soit $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. La série de terme général $\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right)_{n \geq 1}$ converge et l'on a*

$$\|f\|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \right).$$

Preuve. Exercice. ■

Chapitre 2

Intégration

On se propose, dans ce chapitre, de généraliser l'intégration vue en CDI1 des fonctions Riemann-intégrables sur un segment de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le but est de présenter une théorie de l'intégration sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$.

2.1 Intégrales absolument convergentes

2.1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann

On fixe a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et l'on suppose connue la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier sur le *segment* $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. À partir de l'intégrale des fonctions de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, on a défini en CDI1 la notion de fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ comme suit.

Définition 2.1.1 *Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est Riemann-intégrable sur le segment $[a, b]$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que*

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Remarque 2.1.2 *Une fonction Riemann intégrable sur un segment $[a, b]$ est en particulier bornée.*

De manière équivalente, lorsque f est une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir son intégrale supérieure en posant

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x) \mid \phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } f \leq \phi \right\},$$

et son intégrale inférieure en posant

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}.$$

On a alors la propriété suivante

Propriété 2.1.3 *Soit f une fonction bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si son intégrale supérieure et son intégrale inférieure sont égales.*

Définition 2.1.4 *Lorsque f est une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ la valeur commune de son intégrale supérieure et de son intégrale inférieure. On note ce nombre réel $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.5 *Toutes les fonctions bornées sur un segment ne sont pas Riemann-intégrables sur ce segment, comme on peut le constater avec $[a, b] = [0, 1]$ et la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Dans ce cas, on a en effet*

$$\overline{\int_a^b} f = 1 \qquad \textit{et} \qquad \underline{\int_a^b} f = 0.$$

Remarque 2.1.6 *Lorsque le segment est réduit à un point, on dit par convention que toute fonction est Riemann intégrable, d'intégrale nulle. Ceci est consistant avec les rappels ci-dessous dans le cas $a < b$, (voir par exemple la propriété 2.1.8).*

Propriété 2.1.7 (d'approximation dans L^1 avec une borne L^∞) *Soit $a < b$ deux nombres réels, f une fonction Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$, et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que*

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \|\psi\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Preuve. Soit f et $\varepsilon > 0$ comme dans les hypothèses. Il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f \geq \varphi$ sur $[a,b]$ et $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \mathrm{d}x < \varepsilon$. Notant $m = \inf_{[a,b]} f$ et posant pour $x \in [a,b]$, $\psi(x) = \max(m, \varphi(x))$, on vérifie que $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et que pour tout $x \in [a,b]$, $m = \inf_{[a,b]} f \leq \psi(x) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f$ et $\varphi(x) \leq \psi(x)$, ce qui implique que $\|\psi\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}$ et

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - \psi(x)) \mathrm{d}x \leq \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

■

Rappelons quelques propriétés des fonctions Riemann-intégrables sur un segment.

Propriété 2.1.8 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ et λ et μ deux nombres réels. Les fonctions $\lambda f + \mu g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x) \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b \max(f,g)(x) \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b \min(f,g)(x) \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

et

$$\left| \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f|(x) \mathrm{d}x.$$

Preuve. La première propriété découle de la linéarité de l'intégrale pour les fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. La seconde est conséquence de la troisième quitte à changer f et g en $-f$ et $-g$. La dernière est conséquence de la seconde en remarquant que $|f| = \max(f,-f)$. Il suffit donc de prouver la troisième propriété. Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\varphi_f, \varphi_g, \psi_f, \psi_g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [a,b], \qquad \varphi_f(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_g(x) \leq g(x) \leq \psi_g(x),$$

avec

$$\int_a^b (\psi_f - \varphi_f)(x) \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi_g - \varphi_g)(x) \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons que l'on a

$$\forall x \in [a,b], \qquad \min(\varphi_f(x), \varphi_g(x)) \leq \min(f(x), g(x)) \leq \min(\psi_f(x), \psi_g(x)). \tag{2.1}$$

Posant

$$\tilde{\varphi} = \min(\varphi_f, \varphi_g) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi} = \min(\psi_f, \psi_g),$$

on définit deux fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Notons $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ une famille de $n+1$ points ($n \in \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \in \{0, n-1\}$, les fonctions φ_f et φ_g sont constantes sur $]a_i, a_{i+1}[$, puis

$$E_1 = \{i \in \{0,n-1\} \mid \varphi_f \leq \varphi_g \text{ sur }]a_i,a_{i+1}[\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \{i \in \{0,n-1\} \mid \varphi_g < \varphi_f \text{ sur }]a_i,a_{i+1}[\}.$$

Remarquons que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E_1 \cup E_2 = \{0,\ldots,n-1\}$. Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_0,\ldots,a_n\}$. Il existe $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ tel que $x \in E_i$. Distinguons deux cas :

— si $\varphi_f(x) \leq \varphi_g(x)$ (*i.e.* si $x \in]a_i, a_{i+1}[$ pour un $i \in E_1$), alors

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_f(x) - \varphi_f(x),$$

— si $\varphi_g(x) < \varphi_f(x)$ (*i.e.* si $x \in]a_i, a_{i+1}[$ pour un $i \in E_2$), alors

$$\tilde{\psi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \leq \psi_g(x) - \varphi_g(x).$$

Par suite, en découpant par additivité par rapport au segment d'intégration un nombre fini de fois sur $[a,b]$ pour les fonctions en escalier sur $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i\in E_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x + \sum_{i\in E_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i\in E_1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i\in E_2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b (\psi_f - \varphi_f)(x)\mathrm{d}x + \int_a^b (\psi_g - \varphi_g)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité et l'encadrement (2.1) permettent de conclure que la fonction $\min(f,g)$ est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$.
Fixons de nouveau $\varepsilon > 0$ et construisons $\tilde{\varphi}$ à partir de φ_f et φ_g comme précédemment. On a

$$\forall x \in [a,b], \qquad \tilde{\varphi}(x) \leq \min(f,g)(x) \leq f(x) \leq \psi_f(x).$$

On en déduit que

$$\underline{\int_a^b} \min(f,g)(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Puisque f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ par hypothèse et $\min(f,g)$ est intégrable sur $[a,b]$ d'après ce qui précède, l'inégalité précédente s'écrit encore

$$\int_a^b \min(f,g)(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

■

Rappelons la propriété d'additivité par rapport au segment d'intégration, vue en CDI1.

Propriété 2.1.9 (Relation de Chasles) *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a,b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a,c]$ et à $[c,b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

On étend la définition de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs complexes comme suit.

Définition 2.1.10 *Une fonction f du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ est dite Riemann-intégrable sur I lorsque sa partie rélle $\Re(f)$ et sa partie imaginaire $\Im f$ le sont. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \Re f(x)\mathrm{d}x + i\int_a^b \Im f(x)\mathrm{d}x.$$

On a alors la propriété suivante.

Propriété 2.1.11 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes et λ et μ deux nombres complexes. Les fonctions $\lambda f+\mu g$, et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

et

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f|(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ∎

On a également la généralisation suivante de la propriété 2.1.9 d'additivité par rapport au segment d'intégration.

Propriété 2.1.12 (Relation de Chasles) *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a,b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a,c]$ et à $[c,b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.13 *La propriété 2.1.7 est encore vraie pour une fonction f Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ à valeurs complexes : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ telle que*

$$\int_a^b |f(x)-\psi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \|\psi\|_{\infty,[a,b]} \leq \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

De même, on étend la définition de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ ($d \in \mathbb{N}^\star$) comme suit.

Définition 2.1.14 *Soit d un entier au moins égal à 2. Une fonction f du segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{C}^d$) est dite Riemann-intégrable sur I lorsque chaque composante $(f_k)_{1\leq k\leq d}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Dans ce cas, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme le vecteur de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$) dont les composantes sont*

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)_{1\leq k\leq d} = \left(\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x\right)_{1\leq k\leq d}.$$

On a alors la propriété suivante.

Propriété 2.1.15 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{C}^d$) et λ et μ deux nombres réels (resp. complexes). Les fonctions $\lambda f+\mu g$, et $|f|$ sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, et l'on a*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

et

$$\left\| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right\| \leq \int_a^b \|f\|(x)\mathrm{d}x.$$

Preuve. Exercice. ■

On a également la propriété suivante d'additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

Propriété 2.1.16 (Relation de Chasles) *Soit $d \geq 2$ un entier. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ est $c \in [a,b]$. Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$). La fonction f est Riemann-intégrable en restriction à $[a,c]$ et à $[c,b]$ et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque 2.1.17 *Ces extensions de l'intégrale de Riemann aux fonctions à valeurs complexes et aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sont cohérentes lorsque l'on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via la bijection $z \mapsto (\Re z, \Im z)$.*

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions de CDI1 relatives à la continuité et à la continuité par morceaux pour une application définie sur un intervalle.

Définition 2.1.18 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. On dit que f est continue en x_0 lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| < \delta$.*

Remarque 2.1.19 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module dans l'inégalité. Dans ce cas, f est continue en x_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. Cette définition sétend également aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ en remplaçant la valeur absolue par une norme dans l'inégalité. Dans ce cas, f est continue en x_0 si et seulement si chacune de ses composantes l'est.*

Définition 2.1.20 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I.*

Remarque 2.1.21 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs complexes comme aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$.*

Définition 2.1.22 *Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$, et une famille $(x_k)_{0\leq k \leq n}$ de $n+1$ points du segment $[a,b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ et pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, la fonction f est continue sur l'intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge en x_k et x_{k+1} en une fonction continue sur $[x_k, x_{x+1}]$.*

Exemples : Une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est continue par morceaux sur ce segment (prendre $n = 1$ et $x_0 = a$, $x_1 = b$, le prolongement étant f lui-même). La fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1/2[$ est continue par morceaux sur $[0, 1]$.

Remarque 2.1.23 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, dans $\mathbb{C}^d$.*

Propriété 2.1.24 *Si f est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$), alors sa restriction à tout segment $[c, d] \subset [a, b]$ (avec $c < d$) est continue par morceaux sur le segment $[c, d]$.*

Définition 2.1.25 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux sur ce segment.*

Remarque 2.1.26 *Cette définition s'étend aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, dans $\mathbb{C}^d$.*

Remarque 2.1.27 *Lorsque I est un segment, la notion de fonction continue par morceaux sur l'intervalle I introduite à la définition 2.1.22 et la notion de continuité par morceaux sur le segment I introduite à la définition 2.1.25 coïncident.*

Propriété 2.1.28 *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Remarque 2.1.29 *On a une propriété de structure analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$. Remarquer que, pour $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^d$, on a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Propriété 2.1.30 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle non trivial I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Remarque 2.1.31 *On a une propriété de structure analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$. Remarquer que, pour $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^d$, on a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

Propriété 2.1.32 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions continues sur $[a, b]$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Propriété 2.1.33 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Remarque 2.1.34 *Ces deux dernières propriétés valent pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}^d$.*

Propriété 2.1.35 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Les fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, monotones sur le segment $[a, b]$, sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$.*

Propriété 2.1.36 *Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$). Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors la fonction fg est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.*

2.1.2 Fonctions absolument intégrables sur un intervalle

L'intégrale de Riemann, définie sur un segment, et brièvement rappelée dans la section précédente, est la brique de base qui permet la généralisation de la notion d'intégrale aux fonctions définies sur des intervalles plus généraux.

Définition 2.1.37 *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout couple de points $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$, le segment $[a,b]$ est inclus dans I.*

Les ensembles $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $]0,+\infty[$, $[0,1]$ et $[0,1[$ sont des intervalles. À l'inverse, $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'en est pas un. Il existe des intervalles ouverts (exemples : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]0,+\infty[$), des intervalles fermés (exemples : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $[0,1]$) et des intervalles qui ne sont ni fermés ni ouverts (exemple : $[0,1[$).

Définition 2.1.38 *Un intervalle de I est dit trivial s'il est vide ou réduit à un point. Il est dit non trivial dans le cas contraire.*

Définition 2.1.39 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite absolument intégrable sur I lorsque*
- *— quel que soit le segment $[a,b] \subset I$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$*
- *— il existe $M > 0$ tel que pour tout segment $[a,b] \subset I$, $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

Remarque 2.1.40 *Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I, il en est de même de la fonction $|f|$ par la Propriété 2.1.8. Ainsi, le critère de majoration des intégrales de $|f|$ dans la deuxième partie de la définition n'est pas vide de sens.*

Remarque 2.1.41 *La terminologie "absolument intégrable" fait référence au fait que cette définition d'intégration fait intervenir un critère faisant intervenir la valeur absolue de la fonction, plutôt que la fonction elle-même.*

Remarque 2.1.42 *En une phrase, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est absolument intégrable sur l'intervalle I si elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I et si l'intégrale de sa valeur absolue un segment de I est majorée indépendamment du segment choisi.*

La notion d'absolue intégrabilité s'étend aux fonctions d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue dans la définition par le module.

Définition 2.1.43 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est dite absolument intégrable sur I lorsque*
- *— quel que soit le segment $[a,b] \subset I$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$*
- *— il existe $M > 0$ tel que pour tout segment $[a,b] \subset I$, $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq M$; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x < +\infty.$$

La notion d'absolue intégrabilité s'étend aux fonctions d'un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$ en remplaçant la valeur absolue par une norme.

Définition 2.1.44 *Soit $d \geq 2$ un entier. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{C}^d$) est dite absolument intégrable sur I lorsque*

- *quel que soit le segment $[a, b] \subset I$, la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$*
- *il existe $M > 0$ tel que pour tout segment $[a, b] \subset I$, $\int_a^b \|f(x)\| \mathrm{d}x \leq M$; autrement dit*

$$\sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b \|f(x)\| \mathrm{d}x < +\infty.$$

Afin de donner un sens à l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle, nous allons utiliser la notion de suite exhaustive de compacts d'un intervalle. Ceci nous permettra d'utiliser les résultats sur l'intégrale de Riemann dans la construction.

Définition 2.1.45 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle suite exhaustive de segments de I toute suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de segments de I telle que*

$$\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = I.$$

Propriété 2.1.46 *Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ admet (au moins) une suite exhaustive de segments.*

Preuve. Exercice. Indication : distinguer des cas suivant la "forme" de l'intervalle I. ■

Nous pouvons maintenant donner un sens à l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle.

Propriété 2.1.47 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite réelle $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.48 *La valeur absolue, présente dans l'hypothèse d'absolue intégrabilité de f, a disparu dans la conclusion de la propriété.*

Preuve. Notons

$$L = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Il s'agit d'un nombre réel positif ou nul car f est absolument intégrable sur I. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \int_{a^n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x$. Puisque la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et puisque $|f|$ est une fonction positive sur I, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, par définition de L, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n \leq L. \tag{2.2}$$

Ainsi, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante et majorée. Par conséquent, elle converge. En particulier, c'est une suite de Cauchy. Définissons maintenant la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour

$n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x$. Observons que pour $p, n \in \mathbb{N}$, on a, en utilisant notamment la propriété d'additivité 2.1.9 de manière répétée,

$$\begin{aligned}
\beta_{n+p} - \beta_n &= \beta_n = \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
|\beta_{n+p} - \beta_n| &\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{b_n}^{b_{n+p}} |f(x)|\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

en utilisant la croissance de la suite exhaustive de segments qui se traduit pas les inégalités

$$a_{n+p} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n+p}.$$

Par conséquent, on a, en appliquant la propriété d'additivité 2.1.9 à la fonction $|f|$,

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad |\beta_{n+p} - \beta_n| \leq \alpha_{n+p} - \alpha_n. \tag{2.3}$$

Puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy d'après ce qui précède, il en est de même de la suite réelle $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant (2.3). Puisque $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}$. Ceci démontre la première partie de la propriété : la suite des intégrales d'une fonction absolument intégrable sur une suite exhaustive de segments converge. Pour montrer que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive de segments de I choisie, on utilise le lemme 2.1.49. Ceci conclut la preuve. ■

Lemme 2.1.49 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I. On suppose que, pour toute suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite réelle $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive de segments choisie.*

Preuve. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t$. On sait que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta \in \mathbb{R}$. Considérons une autre suite exhaustive $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, et notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\beta}_n = \int_{\tilde{a}_n}^{\tilde{b}_n} f(x)\mathrm{d}x$. Par hypothèse, la suite $(\tilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\tilde{\beta}$. Il nous suffit de montrer que $\beta = \tilde{\beta}$ pour démontrer le lemme. Pour cela, on construit par induction une troisième suite exhaustive de segments $([\overline{a}_n, \overline{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de I de la manière suivante. On pose $\overline{a}_0 = a_0$ et $\overline{b}_0 = b_0$. Par exhaustivité de la suite $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\tilde{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}_0, \qquad [\overline{a}_0, \overline{b}_0] \subset [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n].$$

On pose $\overline{a}_1 = \tilde{a}_{\tilde{N}_0}$ et $\overline{b}_1 = \tilde{b}_{\tilde{N}_0}$. Par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \qquad [\overline{a}_1, \overline{b}_1] \subset [a_n, b_n].$$

On pose $\overline{a}_2 = a_{N_0}$ et $\overline{b}_2 = b_{N_0}$. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, si l'on vient de construire $[\overline{a}_{2p}, \overline{b}_{2p}]$, alors par exhaustivité de la suite $([\tilde{a}_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\tilde{N}_p > \tilde{N}_{p-1}$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}_p, \qquad [\overline{a}_{2p}, \overline{b}_{2p}] \subset [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n].$$

On pose $\overline{a}_{2p+1} = \tilde{a}_{\tilde{N}_p}$ et $\overline{b}_{2p+1} = \tilde{b}_{\tilde{N}_p}$. Si l'on vient de construire $[\overline{a}_{2p+1}, \overline{b}_{2p+1}]$, alors par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_p > N_{p-1}$ tel que

$$\forall n \geq N_p, \qquad [\overline{a}_{2p+1}, \overline{b}_{2p+1}] \subset [a_n, b_n].$$

On pose $\overline{a}_{2p+2} = a_{N_p}$ et $\overline{b}_{2p+2} = b_{N_p}$. On construit ainsi une suite croissante $([\overline{a}_n, \overline{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Puisque $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante, on a $N_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$,

$$I = \cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \cup_{p\in\mathbb{N}}[a_{N_p}, b_{N_p}] = \cup_{p\geq 2}[\overline{a}_p, \overline{b}_p] \subset I.$$

On en déduit que

$$\cup_{p\in\mathbb{N}}[\overline{a}_p, \overline{b}_p] = I,$$

et donc $([\overline{a}_p, \overline{b}_p])_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I. Posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\beta}_n = \int_{\overline{a}_n}^{\overline{b}_n} f(x)\mathrm{d}x$, il vient de ce qui précède que la suite $(\overline{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel que l'on note $\overline{\beta}$. Observant que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad \overline{\beta}_{2p} = \beta_{p-1} \qquad \text{et} \qquad \overline{\beta}_{2p+1} = \tilde{\beta}_p,$$

on obtient par passage à la limite dans les deux égalités les relations

$$\overline{\beta} = \beta \qquad \text{et} \qquad \overline{\beta} = \tilde{\beta},$$

qui achèvent la preuve du lemme. ■

En séparant les parties réelles et imaginaires, on déduit de la propriété 2.1.47 la propriété suivante

Propriété 2.1.50 *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite complexe $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

De même, en travaillant composante par composante, on déduit de ce qui précède la propriété suivante.

Propriété 2.1.51 *Soit $d \geq 2$ un entier. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^d$ (respectivement $f : I \to \mathbb{C}^d$) une fonction absolument intégrable sur I. Quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{C}^d$) $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la limite de cette suite est indépendante de la suite exhaustive choisie. On appelle intégrale de f sur I cette limite commune et on la note $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2.1.52 *On vérifie aisément que la définition de l'intégrale d'une fonction réelle correspond à celle donnée lorsque l'on regarde cette même fonction comme une fonction à valeurs complexes.*

Remarque 2.1.53 *On peut remplacer dans la propriété 2.1.47 la suite exhaustive de segments par une suite* $[a_n, b_n]$ *de segments de* I *avec pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$ *et telle que la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* a *et la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* b*, sans changer la véracité de la propriété, comme le lecteur pourra s'en convraincre en exercice. Ce faisant, on ne travaille plus nécessairement avec des suites monotones, et l'on perd la propriété que* $\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = I$.

Remarquons que la définition de l'intégrale d'une fonction absolument intégrable sur un intervalle général coincide avec celle vue en CDI1 lorsque l'intervalle est un segment. Ceci est précisé dans la propriété suivante.

Propriété 2.1.54 *Soit* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$*. Si une fonction* f *est absolument intégrable sur* $I = [a, b]$*, alors elle est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *et l'on a*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Preuve. Puisque f est absolument intégrable sur $I = [a, b]$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b]$. En particulier, elle est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. De plus, si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de $I = [a, b]$, alors elle est stationnaire en $[a, b]$ à partir d'un certain rang. C'est-à-dire

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \qquad [a_n, b_n] = [a, b].$$

En particulier, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x$ est constante, égale à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, à partir du rang N. En particulier, elle converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. On en déduit (2.4). ■

Dans le cas du segment, la notion d'intégrabilité et celle d'absolue intégrabilité sont confondues.

Propriété 2.1.55 *Soit* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$*. Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction. La fonction* f *est Riemann-intégrable sur* $[a, b]$ *si et seulement si elle est absolument intégrable sur* $[a, b]$*. Dans ce cas, on a la relation* (2.4)

Preuve. La propriété à démontrer est une équivalence. L'implication réciproque a été montrée à la propriété 2.4. Il nous suffit donc de montrer l'implication directe. Pour cela, considérons une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, Riemann-intérable sur $[a, b]$. Par la propriété 2.1.9, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a, b]$. Par la propriété 2.1.8, il en est de même de la fonction $|f|$. En outre, on a pour tout segment $[u, v] \subset [a, b]$, puisque la fonction $|f|$ est positive,

$$\int_u^v |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Par conséquent, l'intégrale de $|f|$ sur tout segment $[u, v]$ de $I = [a, b]$ est majorée par une quantité qui ne dépend pas du segment $[u, v]$ choisi. On en déduit que f est absolument intégrable sur $[a, b]$. Le fait que la relation (2.4) a lieu dans ce cas est une conséquence directe de la proposition 2.1.55. ■

Remarque 2.1.56 *Les propriétés 2.1.54 et 2.1.55 se généralisent évidemment aux fonctions à valeurs dans* $\mathbb{C}$*, dans* $\mathbb{R}^d$ *et dans* $\mathbb{C}^d$*. Cette généralisation est laissée en exercice au lecteur.*

La notion d'intégrabilité absolue permet de définir l'ensemble $\mathcal{L}^1(I)$ pour un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ fixé.

Définition 2.1.57 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Pour $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ et $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$, on pose*
$$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{X}) = \{f : I \to \mathbb{X} \mid f \text{ est absolument intégrable sur } I\}.$$

Remarque 2.1.58 *Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'espace d'arrivée des fonctions, on note en général $\mathcal{L}^1(I)$ au lieu de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{X})$*

On étend la propriété 2.1.8 relative à l'intégrale de Riemann sur un segment aux fonctions abolument intégrables sur un intervalle.

Propriété 2.1.59 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non-vide. Soient λ, μ deux nombres réels et $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et l'on a*
$$\int_I (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_I g(x)\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$
et
$$\left| \int_I f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Preuve. La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur tout segment de I par la propriété 2.1.8. De plus, si $[a, b]$ est un segment inclus dans I, alors on a, en utilisant à nouveau la propriété 2.1.8,
$$\int_a^b |\lambda f(x) + \mu g(x)|\mathrm{d}x \leq |\lambda| \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + |\mu| \int_a^b |g(x)|\mathrm{d}x.$$
Puisque les fonctions f et g sont absolument intégrables sur I, on en déduit
$$\int_a^b |\lambda f(x) + \mu g(x)|\mathrm{d}x \leq |\lambda| \int_I |f(x)|\mathrm{d}x + |\mu| \int_I |g(x)|\mathrm{d}x.$$
Le majorant dans cette inégalité étant fini et indépendant de $[a, b]$, il vient que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}^1(I)$. Soit maintenant $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Par la propriété 2.1.8, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_{a_n}^{b_n} g(x)\mathrm{d}x.$$
En faisant tendre n vers l'infini, on obtient (2.5). Par ailleurs, on a, par la propriété 2.1.8,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\mathrm{d}x.$$
Puisque $f \in \mathcal{L}^1(I)$, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x.$$
Faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité (2.6). ■

On peut résumer la propriété précédente comme suit

Propriété 2.1.60 *L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application*
$$\mathcal{I} : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_I f(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$, qui vérifie de plus

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}), \qquad |\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(|f|).$$

Remarque 2.1.61 *Les propriétés 2.1.59 et 2.1.60 se généralisent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$ et dans $\mathbb{C}^d$. Cette généralisation est laissée en exercice au lecteur.*

2.1.3 Intégrales absolument convergentes fonctions de leurs bornes

Dans le but d'étudier les fonctions définies par des intégrales dont les bornes bougent, commençons par généraliser la propriété d'additivité 2.1.9 aux fonctions absolument intégrables sur un intervalle.

Propriété 2.1.62 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et $a \in I$. Soit f une fonction absolument intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$. La fonction f est absolument intégrable sur les intervalles $I \cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$ et l'on a*

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_{I\cap]-\infty,a]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{I\cap[a,+\infty[} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Preuve. Faisons la preuve de cette propriété dans le cas $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ et laissons la preuve dans les autres cas en exercice. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans l'intervalle $I\cap]-\infty, a]$. Puisque la fonction f est absolument intégrable sur I, elle est intégrable sur le segment $[\alpha, \beta]$ et l'on a

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Puisque le majorant ci-dessus est fini et indépendant de $[\alpha, \beta]$, il vient que f est absolument intégrable sur $I\cap]-\infty, a]$. On démontre de même que la fonction f est absolument intégrable sur $I \cap [a, +\infty[$. Soit maintenant $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de l'intervalle $I\cap]-\infty, a]$, et $([\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de l'intervalle $I\cap[a, +\infty[$. On constate que la suite $([\alpha_n, \tilde{\beta}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I. Utilisant la propriété 2.1.9, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\alpha_n}^{\tilde{\beta}_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{\tilde{\beta}_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

Chacune des trois quantités dans l'égalité ci-dessus converge quand n tend vers $+\infty$ en vertu de ce qui précède et de la propriété 2.1.47. En passant à la limite, on obtient la relation (2.7). ∎

La propriété précédente peut être précisée : l'implication réciproque est également vraie.

Propriété 2.1.63 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et $a \in I$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{X} = \mathbb{C}^d$. La fonction f est absolument intégrable sur I si et seulement si elle est absolument intégrable sur les intervalles $I\cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$. Dans ce cas, on a la relation* (2.7)*.*

Preuve. Procédons par double implication. Le sens direct a été prouvé à la propriété précédente. Afin de montrer l'implication réciproque, considérons une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ (le cas $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ et $X = \mathbb{C}^d$ sont laissés en exercice au lecteur), absolument intégrable sur les intervalles $I\cap]-\infty, a]$ et $I \cap [a, +\infty[$. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans I. S'il ne contient pas a, il est inclus dans $I\cap]-\infty,a]$ ou dans $I\cap[a,+\infty[$, donc f est Riemann-intégrable sur $[alpha, beta]$ dans ce cas. Sinon, $a\in[\alpha,\beta]$, et dans ce cas f est Riemann-intégrable sur $[\alpha,a]$ et sur $[a,\beta]$, donc elle est Riemann-intégrable sur $[\alpha,\beta]$ également. On outre, on a dans tous les cas

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{I\cap]-\infty,a]} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{I\cap[a,+\infty[} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Puisque le majorant ci-dessous est indépendant de $[\alpha,\beta]$, il vient que f est absolument intégrable sur I. On peut donc appliquer la propriété 2.1.62 pour en déduire la relation (2.7). ■

À l'aide de cette propriété de Chasles, on montre la caractérisation suivante.

Propriété 2.1.64 (Caractérisation des fonctions d'intégrale absolument convergente) *Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle non vide et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. Pour tout $a\in I$, on peut définir les fonctions*

$$G_a : \begin{pmatrix} I\cap]-\infty,a] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_x^a |f(x)|\mathrm{d}x \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_a : \begin{pmatrix} I\cap[a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_a^x |f(x)|\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

D'une part, l'intégrale de f converge absolument sur I si et seulement si pour tout $a\in I$, la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a)\in\mathbb{R}^+$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a)\in\mathbb{R}^+$ en $\sup I$. D'autre part, l'intégrale de f converge absolument sur I si et seulement s'il existe $a\in I$ tel que la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a)\in\mathbb{R}^+$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a)\in\mathbb{R}^+$ en $\sup I$. Dans ce cas, on a pour tout $a\in I$,

$$\int_I |f(x)|\mathrm{d}x = \ell_g(a)+\ell_d(a).$$

Preuve. Exercice ■

On déduit de la relation de Chasles la propriété de continuité suivante.

Propriété 2.1.65 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{I\cap]-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

est localement lipschitzienne sur I.

Preuve. Soit x_0 un point de I. Supposons que x n'est pas une extrémité de I (le cas où x est une extrémité de I est laissé en exercice au lecteur). Il existe $\delta>0$ tel que $]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset I$. Ainsi, le segment $[x_0-\delta/2,x_0+\delta/2]$ est inclus dans I. Puisque la fonction f est absolument intégrable sur I, elle est Riemann-intégrable sur $[x_0-\delta/2,x_0+\delta/2]$, et en particulier elle est bornée par un certain $M>0$ sur ce segment. Pour $x,y\in[x_0-\delta/2,x_0+\delta/2]$ avec $y\geq x$, on peut écrire à l'aide de la propriété 2.7,

$$\begin{aligned} F(y)-F(x) &= \int_{I\cap]-\infty,y]} f(t)\mathrm{d}t - \int_{I\cap]-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{I\cap]-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{[x,y]} f(t)\mathrm{d}t - \int_{I\cap]-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_x^y f(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On en déduit que pour $x, y \in [x_0, \delta, x_0 + \delta]$, on a

$$|F(y) - F(x)| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f(t)|\mathrm{d}t \leq M|y - x|.$$

■

Corollaire 2.1.66 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{I \cap]-\infty, x]} f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur I.

Preuve. Puisque f est localement lipschitzienne sur I, elle est continue au voisinage de chaque point de I. Par conséquent, elle est continue sur I. ■

Remarque 2.1.67 *Les deux propriétés précédentes s'étendent aux cas où la fonction est à valeur dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^d$, et dans $\mathbb{C}^d$.*

Ajoutons maintenant le critère de dérivabilité suivant.

Propriété 2.1.68 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Si la fonction f est continue en x_0, alors la fonction F définie en* (2.8) *est dérivable en x_0 et l'on a*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{2.9}$$

Preuve. Lorsque x_0 n'est pas une extrémité de I (le cas où x_0 est une extrémité est laissé au lecteur), on se ramène à traiter des quantités faisant uniquement intervenir des intégrales de Riemann sur des segments en considérant que pour $x \in I$, $x \neq x_0$, on a par la propriété 2.1.62,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

En intégrant la fonction constante $t \mapsto f(x_0)$, on obtient

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(x_0)\mathrm{d}t \right).$$

Répétant la preuve vue en $CDI1$, on considère $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. On en déduit que pour $x \in I$, $x \neq x_0$, avec $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &\leq \frac{\int_{\min(x,x_0)}^{\max(x,x_0)} |f(t) - f(x_0)|\mathrm{d}t}{|x - x_0|} \\ &\leq \frac{\varepsilon |x - x_0|}{|x - x_0|} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

■

On peut alors généraliser au caractère $\mathcal{C}^1$ et aux dérivées d'ordres supérieurs via le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.69 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle non trivial $J \subset I$, alors la fonction F définie en (2.8) est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur J et l'on a*

$$\forall p \in \{0,\ldots,k\},\ \forall x \in J, \qquad F^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x). \tag{2.10}$$

Preuve. En utilisant la propriété précédente, on obtient que la fonction F est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \qquad F'(x) = f(x).$$

Par suite, la fonction F' est de classe $\mathcal{C}^p$ sur J et la fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur J. On obtient (2.10) en dérivant p fois la relation (2.9). ∎

2.1.4 Critères d'intégrabilité absolue

On se propose de donner des critères pour décider de l'intégrabilité absolue ou non d'une fonction sur un intervalle I. On présente les résultats dans le cas où I est de la forme $[a,b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$. Le lecteur pourra adapter ces résultats au cas où b vaut $+\infty$, puis aux cas oû I est de la forme $]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Propriété 2.1.70 *Soit f une fonction de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de $[a,b[$, et g une fonction de $\mathcal{L}^1([a,b[,\mathbb{R}^+)$. Si*

$$\forall x \in I, \qquad |f(x)| \leq g(x),$$

alors la fonction f est absolument intégrable sur $[a,b[$.

Preuve. Soit $([\alpha_n,\beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $[a,b[$. Observons que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} g(x)\mathrm{d}x \leq \int_I g(x)\mathrm{d}x.$$

Puisque ce majorant est fini et indépendant de n, il vient que f est absolument intégrable sur I. ∎

Propriété 2.1.71 *Soit f et g deux fonctions de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrables sur tout segment de $[a,b[$. Si g et positive sur $[a,b[$ avec*

$$|f(x)| \underset{x\to b}{\sim} g(x),$$

alors la fonction f est absolument intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si la fonction g l'est. Si ces fonctions sont absolument intégrables, alors on a [1]

$$\int_x^b |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Si ces deux fonctions ne sont pas intégrables sur $[a,b[$, alors on a [2]

$$\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Noter que les deux quantités tendent alors vers 0.
2. Noter que les deux quantités tendent alors vers $+\infty$.

Preuve. Supposons la fonction g absolument intégrable sur $[a,b[$. Puisque $|f| \underset{x\to b}{\sim} g$, il existe un $\delta \in]0, b-a[$ tel que

$$\forall x \in [b-\delta, b[, \qquad ||f(x)| - g(x)| \leq g(x),$$

d'où

$$\forall x \in [b-\delta, b[, \qquad |f(x)| \leq 2g(x).$$

On en déduit que f est absolument intégrable sur $[b-\delta, b[$ par la propriété précédente. Ainsi, elle l'est sur $[a,b[$, car elle l'est également sur le segment $[a, b-\delta]$. Réciproquement, si l'on suppose la fonction f absolument intégrable sur $[a,b[$, on trouve un $\delta \in]0, b-a[$ tel que

$$\forall x \in [b-\delta, b[, \qquad 0 \leq g(x) \leq 2|f(x)|,$$

et l'on conclut de la même maniere que précédemment que g est absolument intégrable sur $[a,b[$. Dans le cas où les fonctions f et g sont absolument intégrables sur $[a,b[$, on fixe $\varepsilon > 0$ et l'on trouve un $\delta \in]0, b-\delta[$ tel que

$$\forall t \in [b-\delta, b[, \qquad ||f(t)| - g(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

On en déduit que pour $x \in [b-\delta, b[$,

$$\left| \int_{[x,b[} (|f(t)| - g(t)) \mathrm{d}t \right| \leq \int_{[x,b[} ||f(t)| - g(t)| \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_{[x,b[} g(t) \mathrm{d}t.$$

Ceci démontre le résultat annoncé dans ce cas. Dans le cas où les fonctions f et g ne sont pas absolument intégrables sur $[a,b[$, fixons de nouveau $\varepsilon > 0$ et trouvons $\delta \in]0, b-a[$ tel que

$$\forall t \in [b-\delta, b[, \qquad ||f(t)| - g(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

Puisque g n'est pas absolument intégrable sur $[a,b[$, la fonction croissante $x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ est non-bornée sur $[a,b[$. Par suite, elle tend vers $+\infty$ en b^-. En particulier, il existe $\tilde{\delta} \in]0, \delta[$ tel que

$$\forall x \in [b-\tilde{\delta}[, \qquad \frac{\int_a^{b-\delta} (|f(t)| + g(t)) \mathrm{d}t}{\int_a^x g(t) \mathrm{d}t} \leq \varepsilon.$$

On peut alors écrire pour $x \in]b-\tilde{\delta}[$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^x |f(t)| \mathrm{d}t - \int_a^x g(t) \mathrm{d}t \right| &\leq \left| \int_a^{b-\delta} |f(t)| \mathrm{d}t - \int_a^{b-\delta} g(t) \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{b-\delta}^x |f(t)| \mathrm{d}t - \int_{b-\delta}^x g(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_a^{b-\delta} |f(t)| + g(t) \mathrm{d}t + \int_{b-\delta}^x ||f(t)| - g(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \varepsilon \int_a^x g(t) \mathrm{d}t + \varepsilon \int_{b-\delta}^x g(t) \mathrm{d}t \\
&\leq 2\varepsilon \int_a^x g(t) \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat annoncé dans ce cas. ∎

2.1.5 Fonctions de référence de Riemann

Propriété 2.1.72 *Soir $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est absolument intégrable sur $I = [1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment contenu dans $[1, +\infty[$. Par ailleurs, cette fonction est positive, et l'on peut calculer pour $X > 1$

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^X & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln(x)]_1^X & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On vérifie alors que, lorsque $\alpha > 1$,

$$\forall X > 1, \qquad \int_1^X \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\alpha - 1},$$

lorsque $\alpha = 1$,

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et lorsque $\alpha < 1$,

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha} \mathrm{d}x \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Lorsque $\alpha > 1$, l'intégrale de la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur les segments de $[1, +\infty[$ est donc majorée par une constante qui ne dépend pas du segment. La fonction est donc absolument intégrable dans ce cas. Lorsque $\alpha \leq 1$, en revanche, l'intégrale de (la valeur absolue de) la fonction sur $[1, X]$ n'est pas majorée par une constante indépendante de X. Par suite, la fonction n'est pas absolument intégrable sur $[1, +\infty[$. ∎

Propriété 2.1.73 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est absolument intégrable sur $I =]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Preuve. Exercice. ∎

2.1.6 Le théorème du changement de variable

On généralise maintenant le théorème de changement de variable dans une intégrale étudié en CDI1. On s'appuie bien sûr fortement sur le résultat de CDI1 dans la preuve.

Propriété 2.1.74 *Soit I et J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ et φ une bijection de classe C^1 de I dans J, strictement croissante. Soit une fonction f de J dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de J. La fonction f est absolument intégrable sur J si et seulement la fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est absolument intégrable sur I. Dans ce cas, on a*

$$\int_I f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_J f(y)\mathrm{d}y.$$

Preuve. La fonction φ permet de définir une bijection entre les suites exhaustives de segments de I et celles de J en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [\alpha_n, \beta_n] = [\varphi(a_n), \varphi(b_n)],$$

si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de I, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [a_n, b_n] = [\varphi^{-1}(\alpha_n), \varphi^{-1}(\beta_n)],$$

si $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de J. Puisque la fonction f est Riemann-intégrable sur tout segment de J, la fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I, par le résultat de CDI1. Par le même résultat de CDI1, on a de même, en liant la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} |f(\varphi(x))|\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f(y)|\mathrm{d}y.$$

Ainsi, la suite de droite est majorée indépendamment de n si et seulement si la suite de gauche l'est. Ceci montre que f est absolument intégrable sur J si et seulement si $f \circ \varphi \times \varphi'$ est absolument intégrable sur I. Par ailleurs, en utilisant une dernière fois le résultat de CDI1, on a, toujours en liant la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme précédemment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(y)\mathrm{d}y.$$

On obtient le résultat en passant à la limite dans cette égalité. ■

Remarque 2.1.75 *L'hypothèse de monotonie stricte est inutile : dès que φ est une bijection de I dans J, elle ne peut être que* strictement *monotone.*

Remarque 2.1.76 *Lorsque la fonction φ est (strictement) décroissante, le résultat est toujours valable, et l'identité obtenue est*

$$\int_I f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_J f(y)\mathrm{d}y.$$

2.2 Intégrales convergentes

2.2.1 Définition, critères de Cauchy et exemple

On a vu dans la section précédente comment, lorsqu'une fonction f est absolument intégrable sur un intervalle I, on peut définir la notion d'intégrale de f en préservant certaines propriétés de l'intégrale vues en CDI1, et en ayant la même définition qu'en CDI1 lorsque I est un segment. Nous allons maintenant encore généraliser un peu la notion d'intégrale sur un intervalle à certaines fonctions non absolument intégrables sur I.

Définition 2.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. On dit que l'intégrale de f sur I converge lorsque quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ exhaustive de segments de I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Propriété 2.2.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. Si l'intégrale de f sur I converge, alors quelle que soit la suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Cette limite coïncide avec la définition du symbole $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ lorsque f est absolument intégrable sur I (voir la propriété 2.1.47). On la note donc encore $\int_I f(t)\mathrm{d}t$*

Preuve. Il suffit d'utiliser le lemme 2.1.49 pour conclure que la limite de la suite des intégrables ne dépent pas de la suite exhaustive de segments de I choisie. ■

Remarque 2.2.3 *Dans certains ouvrages d'intégration, on parle d'intégrales absolument convergentes sur un intervalle I lorsque l'intégrande est absolument intégrable (au sens de la définition 2.1.43), et d'intégrales convergentes lorsque l'intégrale de l'intégrande converge sur I (au sens de la définition 2.2.1).*

Une reformulation possible de la définition 2.2.1 est donnée par la propriété suivante. Celle-ci permet l'utilisation de suites non-monotones dans les bornes des segments et permet de s'affranchir de l'exhaustivité si besoin.

Propriété 2.2.4 (Critère de Cauchy séquentiel) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f sur I converge si et seulement si quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf I$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup I$, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. De même, l'intégrale de f sur I converge si et seulement si quelle que soit la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\inf I$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup I$, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Les deux formulations sont clairement équivalentes, car "converger" et "être de Cauchy" sont deux propriétés équivalentes pour les suites de nombres réels. Il suffit donc de prouver la première. La preuve de cette propriété est un peu technique (il faut distinguer les cas suivant que I est un segment, ou de la forme $]a, b[$, ou de la forme $[a, b[$ encore de la forme $]a, b]$), et elle n'apporte pas d'éléments fondamentalement nouveaux. Notons que l'implication récriproque est triviale, et que c'est l'implication réciproque qui est donc laissée en exercice au lecteur. ■

L'ensemble des fonctions d'intégrale convergente sur un intervalle est, en général, strictement plus grand que l'ensemble des fonctions absolument intégrables sur cet intervalle, comme on le vérifie sur l'exemple suivant.

Une reformulation continue plutôt que séquentielle du critère précédent (propriété 2.2.4) est la suivante.

Propriété 2.2.5 (Critère de Cauchy continu 1) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout segment inclus dans I. L'intégrale de f sur I converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c, d]$ inclus dans $I \setminus [a, b]$, on a $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon$.*

Remarque 2.2.6 *Dans la propriété précédente, la partie $I\setminus[a, b]$ n'est pas un intervalle, en général.*

Preuve. Pour le sens direct, raisonnons par contraposition. Supposons qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe un segment $[c, d] \subset I \setminus [a, b]$ tel que $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| \geq \varepsilon_0$. Considérons une suite exhaustive $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Construisons une autre suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit. On pose $a_0 = \alpha_0$ et $b_0 = \beta_0$. Utilisant ce qui précède avec $[a, b] = [a_0, b_0]$, il existe un segment $[c_0, d_0] \subset I \setminus [a_0, b_0]$ tel que $|\int_{c_0}^{d_0} f(t)\mathrm{d}t| geq \varepsilon_0$. Il y a deux possibilités : soit $[c_0, d_0]$ est "à gauche" de $[a_0, b_0]$ dans I (*i.e.* $d_0 \leq a_0$), soit $[c_0, d_0]$ est "à droite" de $[a_0, b_0]$ dans I (*i.e.* $b_0 \leq c_0$). Dans le premier cas, on pose $a_1 = d_0$ et $b_1 = b_0$, puis $a_2 = c_0$ et $b_2 = b_0$. Dans le second, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$, puis $a_2 = a_0$ et $b_2 = d_0$. Dans tous les cas, on a

$$\left|\int_{a_2}^{b_2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_1}^{b_1} f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{c_0}^{d_0} f(t)\mathrm{d}t\right| \geq \varepsilon_0.$$

On recommence ensuite en choisissant $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a_2, b_2] \subset [\alpha_n, \beta_n]$, ce qui est possible par exhaustivité de $([\alpha_n, \beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$, et on pose $[a_3, b_3] = [\alpha_N, \beta_N]$, puis on utilise la propriété initiale pour constuire $[a_4, b_4]$ et $[a_5, b_5]$, *etc.* On construit ainsi une suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, dont on vérifie qu'elle est exhaustive, et une suite $([c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, ces suites vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \int_{a_{3n+2}}^{b_{3n+2}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_{3n+1}}^{b_{3n+1}} f(t)\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{c_n}^{d_n} f(t)\mathrm{d}t \right| \geq \varepsilon_0.$$

En particulier, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, donc elle ne converge pas. Ceci assure que l'intégrale de f ne converge pas sur I, et achève la preuve de l'implication dans le sens direct
Dans le sens réciproque, on considère une suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I et on montre que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (donc converge) dans $\mathbb{R}$. On obtient que la limite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie en utilisant un processus similaire à celui rappelé dans la preuve de la propriété 2.2.2, que l'on ne détaille pas ici. Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $[a, b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c, d] \subset I \setminus [a, b]$, $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon/2$. Par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a, b] \subset [a_n, b_n]$. Pour $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci démontre que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge dans $\mathbb{R}$, par complétude de $\mathbb{R}$. La limite de cette suite ne dépend pas de la suite exhaustive choisie par le même mécanisme que celui rappelé dans la preuve de la propriété 2.2.2. On en déduit que l'intégrale de f converge sur I. Ceci achève la preuve de l'implication réciproque, et aussi la preuve de la propriété.

■

Une formulation alternative du critère de Cauchy continu précédent est donné par la propriété suivante.

Propriété 2.2.7 (Critère de Cauchy continu 2) *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I L'intégrale de f converge sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que, pour tout segment $[c, d] \subset I$ contenant $[a, b]$, on a*

$$\left| \int_c^d f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Preuve. Exercice à partir de la propriété 2.2.5. ■

On peut également reformuler cette estimation en termes de restes, une fois acquise la convergence de l'intégrale sur I, comme le précise la propriété suivante.

Propriété 2.2.8 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale converge sur I. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un segment $[a, b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c, d] \subset I$ contenant $[a, b]$, on a*

$$\left| \int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Preuve. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Fixons $\varepsilon > 0$. Par la propriété 2.2.7, il existe $[a, b] \subset I$ tel que pour $[c, d] \subset I$ avec $[a, b] \subset [c, d]$, on a $|\int_c^d f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon/3$. Soit $[c, d] \subset I$ un segment contenant $[a, b]$. Par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $[a, b] \subset [a_n, b_n]$. Pour tout $n \geq N$, on a donc

$$\begin{aligned}\left|\int_{a^n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient, puisque l'intégrale de f converge sur I,

$$\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

■

Remarque 2.2.9 *On abusera parfois de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, même lorsque l'on n'intègre pas sur le segment $[a, b]$. Concrètement, on notera parfois $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ au lieu de $\int_{[0,1[} f(t)\mathrm{d}t$, de $\int_{]0,1]} f(t)\mathrm{d}t$, ou encore de $\int_{]0,1[} f(t)\mathrm{d}t$. On notera même parfois $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour $\int_{[0,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t$ ou pour $\int_{]0,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t$. Une des raisons pour cela est que la relation de Chasles se prolonge aux intégrales convergentes sur un intervalle, comme le montre la propriété suivante.*

Propriété 2.2.10 (Relation de Chasles pour les intégrales convergentes) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I, et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. L'intégrale de f converge sur I si et seulement si elle converge sur $I\cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a, +\infty[$. Dans ce cas, on a*

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_{I\cap]-\infty,a]} f(t)\mathrm{d}t + \int_{I\cap[a,+\infty[} f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.11}$$

Preuve. Raisonnons par double implication. Pour le sens direct, soit $([a_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $I\cap]-\infty, a]$ et $([\tilde{a}_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $I\cap[a, +\infty[$. Par exhaustivité de ces deux suites, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\tilde{a}_n = \tilde{b}_n = a$. Pour $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{a_{n+p}}^{\tilde{b}_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{\tilde{b}_n} f(t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_{a_{n+p}}^{a} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{a} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_{a_{n+p}}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \left|\int_{a_{n+p}}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t - \int_I f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_I f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right|,\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque l'intégrale de f converge sur I, la propriété 2.2.8 fournit un segment $[\alpha, \beta] \subset I$ tel que pour tout segment $[c, d] \subset I$ contenant $[\alpha, \beta]$, on a $\left|\int_I f(t)\mathrm{d}t \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon/2$. On pose alors $A = \min(\alpha, a)$ et $B = \max(a, \beta)$, de sorte que $[\alpha, \beta] \subset$

$[A, B]$, $A \in I \cap]-\infty, a]$ et $B \in I \cap [a, +\infty[$. Par exhaustivité de la suite $([a_n, \tilde{b}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ dans $I \cap]-\infty, a]$, il existe $N^1_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N^1_\varepsilon$, $A \in [a_n, \tilde{b}_n]$. De même, il existe $N^2_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N^2_\varepsilon$, $B \in [\tilde{a}_n, b_n]$. On en déduit que pour $n \geq \max(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $[\alpha, \beta] \subset [A, B] \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n+p}, b_n]$. À l'aide des inégalités précédentes, on obtient pour tout $n \geq \max(N, N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$,

$$\left| \int_{a_{n+p}}^{\tilde{b}_{n+p}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{\tilde{b}_n} f(t)\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci assure que l'intégrale de f converge sur $I \cap]-\infty, a]$. Un raisonnement similaire sur la suite des intégrales sur les segments $[\tilde{a}_n, b_n]$ montre que l'intégrale de f converge également sur $I \cap [a, +\infty[$. Pour le sens réciproque, considérons une suite exhaustive $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Par exhaustivité, on peut supposer sans perte de généralité (en retirant un nombre fini des premiers termes de la suite de segments) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a$ et $a \leq b_n$. Observons que la suite $([a_n, a])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de $I \cap]-\infty, a]$ et la suite $([a, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de segments de $I \cap [a, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est intégrable sur le segment $[a_n, b_n]$, donc elle est intégrable sur les segments $[a_n, a]$ et $[a, b_n]$, et l'on a par la propriété 2.1.9

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t.$$

Puisque chacun des deux termes du membre de droite de cette égalité admet une limite finie quand n tend vers l'infini qui ne dépend pas de la suite choisie, il en est de même du membre de gauche. Ceci montre que l'intégrale de f converge sur I et l'on obtient la relation (2.11) en passant à la limite quand n tend vers l'infini. ■

Exemple 2.2.11 *La fonction*

$$f : \begin{pmatrix} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\sin(t)}{t} \end{pmatrix}$$

est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$, mais elle n'est pas absolument intégrable sur cet intervalle.

En effet, la fonction f est le produit de la fonction $t \mapsto 1/t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [1, +\infty[$ et de la dérivée de la fonction $t \mapsto -\cos(t)$, qui est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$. Par intégration par parties (voir CDI1), on a pour tout segment $[a, b] \subset [1, +\infty[$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos(t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Observons que la fonction $t \mapsto \cos(t)/t^2$ est continue sur $[1, +\infty[$. Elle est donc Riemann-intégrable sur tout segment de $[1, +\infty[$. De plus, elle vérifie pour tout $t \geq 1$, $|\cos(t)/t^2| \leq 1/t^2$. La fonction $t \mapsto 1/t^2$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après la proposition 2.1.72. Par conséquent, la fonction $t \mapsto \cos(t)/t^2$ est absolument intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, son intégrale converge sur $[1, +\infty[$ par la propriété 2.2.2. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de $[1, +\infty[$. La suite $(\int_{a_n}^{b_n} \cos(t)/t^2\mathrm{d}t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ qui ne dépend pas de la suite choisie. De plus, la suite $(\cos(a_n)/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\cos(1)$ (elle est égale à cette valeur à partir d'un certain rang), et la suite $(\cos(b_n)/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 car $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. On en déduit que la suite $(\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de la suite exhaustive choisie. Ceci montre que la fonction f est d'intégrale convergente sur $[1, +\infty[$.

Comme conséquence de la relation de Chasles, on a le critère suivant de convergence des intégrales, qui est peut-être celui qui permet de mieux comprendre la dénomination d'"intégrale convergente".

Propriété 2.2.12 (Caractérisation des fonctions d'intégrale convergente) *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est Riemann-intégrable sur tout segment de I. Pour tout $a \in I$, on peut définir les fonctions*

$$G_a : \begin{pmatrix} I\cap]-\infty, a] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_x^a f(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix} \qquad et \qquad D_a : \begin{pmatrix} I \cap [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

D'une part, l'intégrale de f converge sur I si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a) \in \mathbb{C}$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a) \in \mathbb{C}$ en $\sup I$. D'autre part, l'intégrale de f converge sur I si et seulement s'il existe $a \in I$ tel que la fonction G_a admet une limite finie $\ell_g(a) \in \mathbb{C}$ en $\inf I$ et la fonction D_a admet une limite finie $\ell_d(a) \in \mathbb{C}$ en $\sup I$. Dans ce cas, on a pour tout $a \in I$,

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = \ell_g(a) + \ell_d(a).$$

Preuve. Exercice ■

Terminons par une propriété de structure.

Propriété 2.2.13 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. L'ensemble $C(I, \mathbb{R})$ des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, Riemann-intégrables sur tout segment de I et dont l'intégrale converge sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel qui contient $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ (voir la propriété 2.1.60). L'application de $C(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui envoie une fonction f sur $\int_I f(t)\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $C(I, \mathbb{R})$. Elle prolonge la forme $\mathcal{I}$ définie à la propriété 2.1.60.*

Preuve. La propriété de structure de $C(I, \mathbb{R})$ et la linéarité de la forme sont une conséquence de la propriété 2.1.11 qui vaut sur les segments inclus dans I, et de la définition de l'intégrale comme limite d'une suite d'intégrales sur des segments de I. Leur preuve est laissée au lecteur. Le fait que la forme (maintenant) linéaire prolonge $\mathcal{I}$ est conséquence de la propriété 2.2.2. ■

Remarque 2.2.14 *On a une propriété analogue que $C(I, \mathbb{C})$, qui est laissée en exercice au lecteur.*

2.2.2 Rappel : Les deux formules de la moyenne

Les deux formules suivantes, dites "de la moyenne", sont attribuées au mathématicien français Pierre Bonnet.

Propriété 2.2.15 (Première formule de la moyenne) *Soit g une fonction Riemann-intégrable positive sur un segment $[a, b]$ (avec $a < b$), et soit f une fonction continue sur ce segment à valeurs réelles. Il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

Preuve. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles, donc il existe $m, M \in \mathbb{R}$ et $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que

$$f(x_m) = m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x_M) = M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Puisque la fonction g est positive sur $[a,b]$, on a

$$\forall t \in [a,b], \qquad mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est Riemann intégrable sur $[a,b]$. Puisque de plus g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, la fonction fg l'est également. On déduit de l'inégalité précédente que

$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$, alors $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$ et l'on a (2.12) quel que soit $c \in [a,b]$. Sinon, $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$ et les inégalités ci-dessus fournissent

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \in [m,M].$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles, on peut lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Observons que m et M sont dans l'image du segment $[a,b]$ par f. Il en est donc de même de $\frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (2.12) a lieu. ■

Remarque 2.2.16 *Sous les mêmes hypothèses, mais en autorisant la fonction f à prendre des valeurs complexes, la relation* (2.12) *n'est plus vraie en général. On peut par exemple considérer $f(t) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{b-a}t}$ et $g(t) = 1$ pour s'en convaincre. On a cependant dans ce cas la majoration*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Propriété 2.2.17 (Seconde formule de la moyenne) *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b$), à valeurs réelles. Soit g une fonction positive décroissante sur $[a,b]$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\int_a^c f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.13}$$

Preuve. Puisque la fonction g est décroissante sur le segment $[a,b]$, elle est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ par la propriété 2.1.35. Par suite, la fonction fg est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ par la propriété 2.1.36 puisque f l'est également. Le membre de gauche dans la relation (2.13) est donc bien défini. L'intégrale dans le membre de droite est quant à elle bien définie par la propriété 2.1.12 pour tout $c \in [a,b]$ car f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ tout entier. Nous allons donc simplement montrer qu'il existe un $c \in [a,b]$ tel que l'égalité (2.13) a lieu.
Pour cela, désignons pour tout entier $N \geq 1$ par $(t_i)_{0\leq i\leq N}$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$ définie pour $i \in \{0,\cdots,N\}$ par $t_i = a + i\frac{b-a}{N}$. Posons pour tout tel entier N

$$I_N = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)g(t_k)\mathrm{d}t.$$

La fonction f est Riemann-intégrable sur le segment $[a,b]$ par hypothèse, donc il en est de même de $|f|$, et ces deux fonctions sont donc Riemann-intégrables en restriction à tout segment inclus dans

$[a,b]$. En particulier, on peut introduire les fonctions F et K définies par

$$F:\begin{pmatrix}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad K:\begin{pmatrix}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t\end{pmatrix}$$

Puisque la fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, la fonction F est continue sur le segment $[a,b]$ en vertu du corollaire 2.1.66. Puisque le segment $[a,b]$ est compact, et F est à valeurs réelles, la fonction F est bornée et atteint ses bornes : il existe $m,M\in\mathbb{R}$ tels que

$$m=\inf_{x\in[a,b]}F(x)\qquad\text{et}\qquad M=\sup_{x\in[a,b]}F(x).$$

De plus, dans l'esprit de la propriété 2.1.65, si $\overline{M}$ est un majorant de $|f|$ sur le segment $[a,b]$, on a

$$\forall x,y\in[a,b],\qquad |K(x)-K(y)|\leq\overline{M}|x-y|,$$

et ainsi K est lipsciptzienne sur $[a,b]$. Forts de ces observations, nous allons montrer justifier que la suite $(I_N)_{N\geq 1}$ tend vers l'intégrale dans le membre de droite de (2.13), et c'est à partir de I_N que nous obtiendrons le résultat sur cette intégrale, par passage à la limite. Par application répétée de la relation de Chasles (propriété 2.1.9), on a pour tout $N\geq 1$,

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, par décroissance de g sur $[a,b]$, on a pour tout $N\geq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t-I_N\right| &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|f(t)|(\underbrace{g(t_k)-g(t)}_{\geq 0})\mathrm{d}t\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|f(t)|\left(g(t_k)-g(t_{k+1})\right)\mathrm{d}t\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\left(g(t_k)-g(t_{k+1})\right)\left(K(t_{k+1})-K(t_k)\right)\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\left(g(t_k)-g(t_{k+1})\right)\overline{M}(\underbrace{t_{k+1}-t_k}_{=\frac{b-a}{N}})\\ &\leq \overline{M}\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(g(t_k)-g(t_{k+1})\right)\\ &\leq \overline{M}\frac{b-a}{N}\left(g(b)-g(a)\right).\end{aligned}$$

Ceci assure que la suite $(I_N)_{N\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Par ailleurs, on peut effectuer une transformation d'Abel dans l'écriture de I_N en remarquant que pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
I_N &= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) \left(F(t_{k+1}) - F(t_k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) F(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) F(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} g(t_{k-1}) F(t_k) - \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) F(t_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} g(t_{k-1}) F(t_k) - \sum_{k=1}^{N-1} g(t_k) F(t_k) + g(t_{N-1})F(b) - g(a)\underbrace{F(a)}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \big(\underbrace{g(t_{k-1}) - g(t_k)}_{\geq 0}\big) F(t_k) + \underbrace{g(t_{N-1})}_{\geq 0} F(b). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $N \geq 1$,

$$m \sum_{k=1}^{N-1} \left(g(t_{k-1}) - g(t_k)\right) + m g(t_{N-1}) \leq I_N \leq M \sum_{k=1}^{N-1} \left(g(t_{k-1}) - g(t_k)\right) + M g(t_{N-1}).$$

Ainsi, puisque les sommes ci-dessus sont téléscopiques, pour tout $N \geq 1$,

$$m g(a) \leq I_N \leq M g(a).$$

Passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans ces inégalités, on a, compte tenu de la convergence de la suite $(I_N)_{N \geq 1}$ montrée précédemment,

$$m g(a) \leq \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t \leq M g(a).$$

Si $g(a) = 0$, alors la fonction g est identiquement nulle sur $[a, b]$ et donc $\leq \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = 0$. Dans ce cas, la relation (2.13) est vérifiée quel que soit $c \in [a, b]$. Sinon, $g(a) > 0$, et l'on a donc

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t \in [m, M].$$

La fonction F étant continue sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, et prenant les valeurs m et M, on sait par le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle prend toutes les valeurs entre m et M. En particulier, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$F(c) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t.$$

Ceci achève la preuve de la démonstration. ∎

Remarque 2.2.18 *L'identité* (2.13) *dans la propriété précédente est encore vraie lorsque $a = b$: il suffit de prendre $c = a = b$ et l'on a $0 = g(a) \times 0$.*

Remarque 2.2.19 *Si l'on suppose de plus que f est continue sur le segment $[a, b]$ et que g y est* *de classe $\mathcal{C}^1$, alors la preuve de la seconde formule de la moyenne est plus simple. En effet, on peut écrire directement par intégration par parties que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(t)g(t)\mathrm{d}t = [Fg]_a^b + \int_a^b F(t)\left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction g est décroissante sur $[a,b]$, sa dérivée est négative sur le segment $[a,b]$. Par la première formule de la moyenne, on sait qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b F(t)\left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t = F(d)\int_a^b \left(-g'(t)\right)\mathrm{d}t = (g(a)-g(b))\int_a^d f(t)\mathrm{d}t.$$

Compte tenu du fait que $F(a)=0$, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(b)F(b) + (g(a)-g(b))\,F(d).$$

Le cas où $g(a)=0$ correspond à $g \equiv 0$ sur $[a,b]$, et la seconde formule de la moyenne est vraie pour tout $c \in [a,b]$. Supposons donc que $g(a)>0$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = g(a)\left(\underbrace{\frac{g(b)}{g(a)}}_{\in[0,1]}F(b) + \underbrace{\Big(1-\frac{g(b)}{g(a)}\Big)}_{\in[0,1]}F(d)\right).$$

On en déduit que le terme en facteur de $g(a)$ dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus est dans le segment d'extrémités $F(b)$ et $F(d)$. Puisque la fonction F est continue sur le segment $[a,b]$ et $d \in [a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$F(c) = \frac{g(b)}{g(a)}F(b) + \Big(1-\frac{g(b)}{g(a)}\Big)F(d).$$

On a ainsi montré la seconde formule de la moyenne, dans un cas plus restrictif, sans avoir recours à la suite $(I_N)_{N\geq 1}$.

Cette propriété 2.2.17 ne vaut que pour les fonctions à valeurs réelles. Pour les fonctions à valeurs complexes, on a toutefois, dans le même esprit, la propriété suivante, dont la preuve s'inspire de la preuve précédente.

Propriété 2.2.20 *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$ (avec $a<b$), à valeurs complexes. Soit g une fonction positive décroissante sur $[a,b]$. On a l'inégalité*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq g(a)\sup_{c\in[a,b]}\left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right|. \tag{2.15}$$

Preuve. Reprenant les notations de la preuve précédente, on peut définir la suite I_N, les fonctions F et K, qui sont toujours lipschitziennes donc continues sur le segment $[a,b]$, et prouver comme précédemment que la suite $(I_N)_{N\geq 1}$ converge vers $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ Menant la même transformation d'Abel que ci-dessus, on aboutit à (2.14). De cette égalité, en notant $C=\sup_{x\in[a,b]}|F(x)|$, on obtient pour tout $N\geq 1$,

$$|I_N| \leq C\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(g(t_{k-1})-g(t_k)\right) + Mg(t_{N-1})\right) = Cg(a).$$

Il s'agit de l'égalité que l'on souhaitait démontrer. ∎

Remarque 2.2.21 *Un intérêt remarquable de l'inégalité* (2.15) *est que le membre de droite comporte un module* à l'extérieur *de l'intégrale. Ceci signifie que les oscillations dans le cas complexe, et les changements de signe dans le cas réel, qui rendent des intégrales convergentes sans qu'il y ait d'intégrabilité absolue, sont pris en compte par cette inégalité. Il faut bien garder à l'esprit que l'inégalité*

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t,$$

est vraie dès que la fonction f est Riemann intégrable sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles ou complexes, mais le membre de droite peut être considérablement plus grand que le membre de gauche dans cette inégalité. En ce sens, l'inégalité (2.15) *est très précise.*

2.2.3 Le critère d'Abel pour la convergence des intégrales

Lorsque l'on souhaite montrer qu'une intégrale d'une fonction sur un intervalle converge et que les critères d'intégrabilité absolue n'ont pas fonctionné (ou, idéalement, quand on est certain que l'intégrale ne converge pas absolument), on peut utiliser le critère suivant, qui permet parfois de conclure.

Propriété 2.2.22 (Critère d'Abel pour la convergence des intégrales) *Soit a, b avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On se donne une fonction f de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$, et une fonction g positive et décroissante sur $[a,b[$, tendant vers 0 en b. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in [a,b[, \qquad \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq M.$$

L'intégrale de fg converge sur $[a,b[$.

Preuve. Puisque g est décroissante sur $[a,b[$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$. Par produit, la fonction fg est donc également Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b[$. Utilisons le critère de Cauchy séquentiel de la propriété 2.2.4. Pour cela, considérons une suite $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I avec $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. À l'aide de la relation de Chasles (propriété 2.1.9), écrivons que pour $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t. \tag{2.16}$$

Soit $\delta > 0$ tel que $[a, a+2\delta[\subset [a,b[$. La fonction fg est Riemann-intégrable sur le segment $[a, a+\delta]$, donc sa valeur absolue y est majorée par un certain $C > 0$. Par ailleurs, utilisant la propriété de la moyenne 2.2.20, on peut écrire pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, lorsque $b_n \leq b_{n+p}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| &\leq g(b_n) \sup_{c\in[b_n,b_{n+p}]} \left|\int_{b_n}^{c} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq g(b_n)\left(\left|\int_a^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right| + \sup_{c\in[b_n,b_{n+p}]}\left|\int_a^c f(t)\mathrm{d}t\right|\right) \\ &\leq 2Mg(b_n). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Par une étude similaire laissée au lecteur dans le cas où $b_{n+p} < b_n$, on conclut que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq 2M\max(g(b_n), g(b_{n+p})).$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, il existe un rang $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon^1$, on a $a_n - a \leq \min(\varepsilon/(4C), \delta)$. Par conséquent, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon^1$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a_{n+p}}^{a_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_{a_{n+p}}^{a_n} |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^{a_{n+p}} |f(t)g(t)|\mathrm{d}t + \int_{a_n}^{a} |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq C(a_{n+p} - a) + C(a_n - a) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Par ailleurs, puisque la fonction g tend vers 0 en b par hypothèse, et puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers b, il existe un rang $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon^2$, $|g(b_n)| \leq \varepsilon/(4M)$. Utilisant (2.18), on obtient pour tout $n \geq N_\varepsilon^2/$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{b_n}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.19}$$

Combinant (2.17) et (2.19) dans l'égalité (2.16), il vient par inégalité triangulaire que pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$, et tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\int_{a_{n+p}}^{b_{n+p}} f(t)g(t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, la propriété 2.2.4 assure que l'intégrale de fg converge sur $[a, b[$. ■

Remarque 2.2.23 *On peut évidemment écrire et montrer un critère d'Abel similaire pour des produits de fonctions sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ et des hypothèses adaptées. C'est un bon exercice pour le lecteur.*

Remarque 2.2.24 *Les propriétés 2.1.65 et 2.1.68, ainsi que leurs corollaires 2.1.66 et 2.1.69, qui n'utilisent que des propriétés locales (continuité, dérivabilité, etc) sont encore vrais si l'on suppose simplement que f est d'intégrale convergente sur I (ce qui est une hypothèse moins forte que $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$), comme le lecteur pourra s'en convaincre en exercice.*

2.2.4 Espace des fonctions de carré intégrable, inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide.

Définition 2.2.25 *On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions (Riemann-intégrables sur tout segment inclus dans I) dont le carré est absolument intégrable sur I. Pour $f \in \mathcal{L}^2(I, \mathbb{C})$, on note*

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Propriété 2.2.26 *L'ensemble $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto \|f\|_2$ est une semi-norme sur cet espace.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.2.27 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $f,g \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. La fonction fg est absolument intégrable sur I et l'on a*

$$\left|\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_I |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Soit $f,g \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Observons que pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2.$$

Puisque f et g sont Riemann-intégrables sur tout segment de I, il en est de même de fg, de $|fg|$, de $|f|^2$ et de $|g|^2$. Par suite, pour tout segment $[a,b] \subset I$,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x.$$

Puisque $f,g \in \mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$, le membre de droite de cette inégalité est majoré indépendamment du segment $[a,b]$. Il en est donc de même du membre de gauche. On en déduit que fg est absolument intégrable sur I (*i.e.* $fg \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$). Utilisant l'inégalité (2.6) de la propriété 2.1.59, on obtient

$$\left|\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_I |f(x)g(x)|\mathrm{d}x.$$

Pour montrer l'autre partie de l'inégalité, on peut donc supposer sans perte de généralité que f et g sont à valeurs positives sur I. Dans ce cas, on définit classiquement la fonction

$$P : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \int_I (f(x)+\lambda g(x))^2\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

qui est bien définie par la propriété précédente puisque f et g sont de carrés sommables sur I. Remarquons que la fonction P est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ par positivité de l'intégrale et que c'est une fonction poynomiale de degré au plus 2. En effet, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad P(\lambda) = \left(\int_I g(x)^2\mathrm{d}x\right)\lambda^2 + 2\left(\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\lambda + \left(\int_I f(x)^2\mathrm{d}x\right).$$

Supposons que $\int_I g(x)^2\mathrm{d}x = 0$. Dans ce cas, l'intégrale de g^2 est nulle sur tout segment de I. Donc l'intégrale de g également, et il en est de même de l'intégrale de fg. On en déduit que l'intégrale de fg est nulle sur I. Ainsi, on a bien

$$\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_I f(x)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I g(x)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.20}$$

Supposons maintenant que $\int_I g(x)^2\mathrm{d}x > 0$. Dans ce cas, puisque P est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif ou nul. Cette condition sécrit

$$4\left(\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_I f(x)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_I g(x)^2\mathrm{d}x\right) \leq 0.$$

On en déduit que (2.20) est encore vraie dans ce cas. Ceci achève la preuve de l'inégalité. ■

2.3 Intégrales à paramètres

2.3.1 Fonctions définies par une intégrale sur un segment fixe

Commençons par énoncer et démontrer un résultat assurant la continuité.

Propriété 2.3.1 *Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$ et (X, d) un espace métrique localement compact (voir la définition 1.1.28). Soit f une fonction continue sur $X \times [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

est continue sur X.

Preuve. Remarquons que la continuité de la fonction f sur $X \times [a, b]$ implique que, pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue, donc Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Ainsi, la fonction F est bien définie sur X. Par ailleurs, si l'on fixe $x_0 \in X$, alors, puisque X est localement compact, il existe un voisinage V de x_0 dans X qui est compact. Ainsi, la partie $V \times [a, b]$ est compacte, comme produit de compacts. La fonction f étant continue, par restriction, à cette partie, il vient qu'elle est uniformément continue sur cette partie par le théorème de Heine. Fixons $\varepsilon > 0$. Par la raisonnement précédent, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in V, \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b], \qquad \left(|t_1 - t_2| + |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x, t_1) - f(x, t_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.\right)$$

En particulier, dès que $x \in V$ est tel que $|x - x_0| < \eta$, on a

$$\forall t \in [a, b], \qquad |f(x, t) - f(x_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit que, pour $x \in V$ tel que $|x - x_0| < \eta$,

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|\, \mathrm{d}t \leq \int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) \mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Ceci montre que la fonction F est continue en tout $x_0 \in X$. ■

Remarque 2.3.2 *Le résultat vaut également pour une fonction f continue sur $X \times \Pi_{i=1}^d [a_i, b_i]$, et dans ce cas on a la continuité de la fonction $F(x) = \int_{\Pi_{i=1}^d [a_i,b_i]} f(x, t_1, \cdots, t_d)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d$ sur X. La preuve est très similaire (et laissée en exercice).*

Remarque 2.3.3 *On généralise la propriété précédente aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, $\mathbb{C}^{\tilde{d}}$ en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en raisonnant composante par composante.*

Présentons maintenant un résultat assurant le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par une intégrale sur un segment fixe.

Propriété 2.3.4 *Soit X un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, et a et b deux nombres réels avec $a < b$. On se donne une fonction f de $X \times [a, b]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose continue sur $X \times [a, b]$. On suppose de plus que, pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $X \times [a, b]$. Dans ce cas, la fonction F définie en (2.21) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et l'on a*

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \quad \forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t. \tag{2.22}$$

Remarque 2.3.5 *L'hypothèse sur les dérivées partielles premières de la fonction f signifie que pour tout $t \in [a,b]$, $x \in X$ et $i \in \{1, \cdots, d\}$, en notant e_i le ième vecteur de la base canoniqie de $\mathbb{R}^d$, le rapport (défini pour h réel différent de 0 de valeur absolue assez petite car X est ouvert) $\frac{f(x+he_i,t)-f(x,t)}{h}$ admet une limite réelle (notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)$), et que les d fonctions de $X \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ainsi obtenues sont continues sur $X \times [a,b]$.*

Preuve. Commençons par remarquer que puisque X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, il est localement compact et la propriété précédente s'applique, de sorte que la fonction F est bien définie et continue sur X. Fixons maintenant $i \in \{1, \cdots, d\}$ et montrons que la fonction F admet une dérivée partielle par rapport à x_i en tout point de X. Fixons $x = (x_1, \cdots, x_d) \in X$ et notons e_i le $i$ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Observons que, puisque X est ouvert, pour h réel assez petit, on a $x^0 + he_i \in X$. De plus, pour un tel h, on a

$$F(x+he_i) - F(x) = \int_a^b (f(x+he_i,t) - f(x,t))\,\mathrm{d}t.$$

Fixons $t \in [a,b]$. La fonction $s \mapsto f(x+se_i,t)$ est continue sur $[0,h]$ si $h > 0$ et sur $[h,0]$ si $h < 0$. Elle est de plus dérivable sur ce segment, comme assuré par l'hypothèse sur f (et un résultat sur la dérivabilité des fonctions composées), de dérivée en s égale à $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+se_i,t)$. Ainsi, sa dérivée est continue sur le segment $[0,h]$ (ou $[h,0]$) par hypothèse sur f. Par conséquent, le théorème fondamental du calcul vu en CDI1 assure que

$$f(x+he_i,t) - f(x,t) = \int_0^h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+se_i,t)\mathrm{d}s,$$

par théorème de changement de variable de CDI1. Ceci implique, toujours pour h réel non nul assez petit, disons dans $]-\delta,\delta[\setminus\{0\}$ pour un certain $\delta > 0$,

$$\frac{F(x+he_i) - F(x)}{h} = \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t.$$

La fonction

$$g : \begin{pmatrix}]-\delta,\delta[\times([a,b]\times[0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,(t,\sigma)) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\sigma,t) \end{pmatrix},$$

est continue sur $]-\delta,\delta[\times([a,b]\times[0,1])$, par hypothèse sur f et par utilisation des résultats sur les produits et compositions de fonctions continues. On peut donc lui appliquer le résultat montré à la propriété 2.3.1. Celui-ci assure que la fonction

$$G : \begin{pmatrix}]\delta,\delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+h\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $]\delta,\delta[$. En particulier, on peut passer à la limite quand h tend vers 0 dans le membre de droite de (2.3.1), et l'on obtient que F admet une dérivée partielle par rapport à la $i$ème variable en x, et que cette dérivée partielle est

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+0\sigma,t)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Condidérant les d dérivées partielles de F ainsi obtenues sur X, et utilisant de nouveau la propriété 2.3.1 pour montrer qu'elles sont continues sur X, on déduit d'un résultat de CDI1 que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert X et vérifie bien (2.22). ■

Remarque 2.3.6 *Le résultat vaut également pour une fonction f vérifiant les hypothèses sur $X \times \Pi_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$, et dans ce cas on a le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction $F(x) = \int_{\Pi_{i=1}^{d}[a_i,b_i]} f(x, t_1, \cdots, t_d)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_d$ sur X. La preuve est très similaire (et laissée en exercice).*

Remarque 2.3.7 *On généralise la propriété précédente aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, $\mathbb{C}^{\tilde{d}}$ en séparant partie réelle et partie imaginaire, et en raisonnant composante par composante.*

Remarque 2.3.8 *Le résultat précédent vaut également losque X est un intervalle (non nécessairement ouvert) de $\mathbb{R}$.*

Exercice 2.3.9 (Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. *Justifier que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Définissons les fonctions*

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad H : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

   Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de F et F'.
3. *Calculer $H(0)$ et montrer que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.*
4. *Déduire des questions précédentes que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\pi}{4} - H(x) = F(x)^2.$$

5. *En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.*

2.3.2 Fonctions définies par une intégrale sur un segment variable

Un résultat de continuité

Propriété 2.3.10 *Soit (X, d) un espace métrique localement compact et $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit une fonction f continue sur $X \times [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, T) & \longmapsto & \int_a^T f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $X \times [a, b]$.

Preuve. Fixons $(x, T) \in X \times [a, b]$. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur le segment $[a, T]$, par conséquent elle est Riemann-intégrable sur ce segment. Ceci assure que $F(x, T)$ est bien défini. Observons que, pour $y \in X$ et $\delta T \in \mathbb{R}$ tel que $T + \delta T \in [a, b]$, on a

$$F(y, T + \delta T) - F(x, T) = F(y, T + \delta T) - F(y, T) + F(y, T) - F(x, T). \tag{2.23}$$

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque X est localement compact, il existe un voisinage compact V de x dans X. Puisque V et $[a, b]$ sont compacts, $V \times [a, b]$ est compact. Puisque f est continue sur ce compact, elle y est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in V \times [a,b]$, $|f(y,t)| \leq M$. Ceci implique que, si $|\delta T| < \varepsilon/(2M)$, alors pour tout $y \in V$,

$$|F(y,T+\delta T) - F(y,T)| \leq \int_{\min(T,T+\delta T)}^{\max(T,T+\delta T)} |f(y,t)|\mathrm{d}t \leq M|\delta T| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Puisque f est continue sur le compact $V \times [a,b]$, elle est uniformément continue sur ce compact par le théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $y_1, y_2 \in X$ et $t_1, t_2 \in [a,b]$, si $d(y_1,y_2) + |t_1 - t_2| < \eta$, alors $|f(y_1,t_1) - f(y_2,t_2)| < \varepsilon/(2(b-a))$. On en déduit que pour tout $y \in B(x,\eta[$, on a

$$|F(y,T) - F(x,T)| \leq \int_a^T |f(y,t) - f(x,t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{T-a}{b-a} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.25}$$

Notons que $W = V \cap B(x,\eta[$. Remarquons que W est un voisinage de x, puisque c'est une intersection de voisinages de x. Utilisant les majorations (2.24) et (2.25) après une inégalité triangulaire dans le membre de droite (2.23), on obient pour $y \in W$ et $\delta T \in \mathbb{R}$ tel que $|\delta T| < \varepsilon/(2M)$,

$$|F(y,T+\delta T) - F(x,T)| \leq |F(y,T+\delta T) - F(y,T)| + |F(y,T) - F(x,T)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci démontre la continuité de F en (x,T). ■

Remarque 2.3.11 *Utilisant la relation de Chasles (propriété 2.1.9) ainsi que la propriété de continuité d'une intégrale sur un segment fixe (propritété 2.3.1), on obtient facilement que, sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 2.3.10, pour tout $c \in [a,b]$, la fonction $(x,T) \mapsto \int_c^T f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $X \times [a,b]$.*

Corollaire 2.3.12 *Soient $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ deux segments de $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $a < b$. Soit f une fonction continue de $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ et ψ deux fonctions continues de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$. Alors la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $[\alpha,\beta]$.

Preuve. Le segment $[\alpha,\beta]$ est localement compact. Puisque la fonction f est continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$, la propriété 2.3.10 assure que la fonction $G : (x,T) \mapsto \int_a^T f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$. Par suite, la fonction $F_1 : (x,T_1,T_2) \mapsto G(x,T_1) - G(x,T_2)$ est continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b] \times [a,b]$. Observons que pour tout $x \in [\alpha,\beta]$,

$$F(x) = F_1(x,\varphi(x),\psi(x)),$$

ce qui implique que F est continue sur le segment $[\alpha,\beta]$ par composition de fonctions continues. ■

Un résultat de dérivabilité

Propriété 2.3.13 *Soit X un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, et a et b deux nombres réels avec $a < b$. On se donne une fonction f de $X \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose continue sur $X \times [a,b]$. On suppose de plus que, pour tout $i \in \{1,\cdots,d\}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $X \times [a,b]$. Dans ce cas, la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} X \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,T) & \longmapsto & \int_a^T f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

admet des dérivées partielles premières par rapport à chacune de ses $d+1$ variables en tout point de $X \times [a,b]$ et celles-ci sont continues sur $X \times [a,b]$ [3] *et l'on a*

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\}, \quad \forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \quad \forall T \in [a,b], \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_d, T) = \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t. \tag{2.26}$$

et

$$\forall (x_1, \cdots, x_d) \in X, \quad \forall T \in [a,b], \qquad \frac{\partial F}{\partial T}(x_1, \ldots, x_d, T) = f(x,T). \tag{2.27}$$

Preuve. L'existence des dérivées partielles premières par rapport aux d premières variables s'obtient, à $T \in [a,b]$ fixé, avec la proposition 2.3.4 appliquée à la fonction G définie sur X par $G(x_1, \cdots, x_d) = F(x_1, \cdots, x_d, T)$. On obtient ainsi (2.26). La continuité de ces d dérivées partielles premières sur $X \times [a,b]$ est conséquence de la continuité des d dérivées partielles premières correspondantes de f par rapport aux mêmes variables sur le même ensemble (en appliquant la propriété de continuité 2.3.10 qui assure la continuité des d fonctions $(x_1, \cdots, x_d, T) \mapsto \int_a^T \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_d, t)\mathrm{d}t$). L'existence de la dérivée partielle première de F par rapport à sa dernière variable s'obtient, à $(x_1, \cdots, x_d) \in X$ fixé en appliquant le théorème fondamental du calcul à la fonction $g(T) = \int_a^T f(x_1, \cdots, x_d, t)\mathrm{d}t$. On obtient ainsi (2.27). La continuité de cette dérivée partielle sur $X \times [a,b]$ découle de l'hypothèse de continuité de f sur $X \times [a,b]$. ∎

2.3.3 Fonctions définies par une intégrale convergente sur un intervalle fixe

Un exemple

Considérons la fonction

$$f : \begin{pmatrix} [0,1] \times [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,t) & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-xt} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que la fonction f est continue sur $[0,1] \times [0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale (absolument) convergente sur $[0,+\infty[$. On peut ainsi définir la fonction

$$F : \begin{pmatrix} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $F(0) = 0$ alors que pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) = 1$. Ainsi, malgré la continuité de f sur $[0,1] \times [0,+\infty[$, la fonction F n'est pas continue sur $[0,1]$. Ceci est une différence majeure avec le cas où l'on intègre sur un segment fixe une fonction globalement continue par rapport au couple formé du paramètre et de la variable d'intégration (voir propriété 2.3.1).

Notion d'intégrale convergeant uniformément par rapport à un paramètre

Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est d'intégrale convergente sur I. Utilisant la propriété 2.2.8, ceci signifie que

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left| \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \right).$$

3. On prendra garde ici au fait que $X \times [a,b]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$, ce qui explique que l'on ne parle pas de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $X \times [a,b]$ dans ce syllabus.

On dira que l'intégrale de f converge sur I *uniformément sur X par rapport au paramètre x* lorsque le segment $[a,b]$ de la propriété ci-dessus peut être choisi de manière indépendante de x dans X.

Définition 2.3.14 *Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I. On dit que l'intégrale de f converge sur I uniformément sur X par rapport au paramètre x lorsque pour tout $x \in X$, l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I et de plus*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I f(x,t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right).$$

On peut également, dans l'esprit de la propriété 2.2.7, donner le critère suivant.

Propriété 2.3.15 *Soit X un ensemble non vide, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, et f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment de I. L'intégrale de f converge sur I uniformément sur X par rapport au paramètre x si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I, \qquad \left([a,b] \subset [c,d] \Longrightarrow \left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right).$$

Preuve. C'est exactement la même preuve que celle de l'equivalence entre les propriétés 2.2.7 et 2.2.8, de manière uniforme par rapport à $x \in X$. Elle est donc laissée en exercice. ∎

Remarque 2.3.16 *Une autre formulation équivalente, sous les mêmes hypothèses, à la convergence des intégrales sur I uniformément par rapport au paramètre $x \in X$, est que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I,\ \forall [c,d] \subset I,\ \textit{avec}\ [a,b] \subset [c,d], \qquad \sup_{x\in X}\left(\left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right|\right) < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists [a,b] \subset I, \qquad \sup_{[c,d]\ \textit{avec}\ [a,b]\subset[c,d]\subset I}\ \sup_{x\in X}\left(\left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right|\right) < \varepsilon.$$

Remarque 2.3.17 *Une dernière formulation équivalente, sous les mêmes hypothèses, à la convergence des intégrales sur I uniformément par rapport au param̂etre x dans X est de dire : quelle que soit la suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I, la suite de fonctions $\left(\alpha_n(x) = \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X (ou est uniformément de Cauchy sur X), comme on le verra par exemple dans la preuve de la propriété 2.3.18 .*

Retour sur l'exemple précédent

Dans l'exemple précédent, on a, pour $x \in]0,1]$ et $[c,d] \subset [0,+\infty[$,

$$\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t = x\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t = x\left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_c^d = \mathrm{e}^{-xc} - \mathrm{e}^{-xd}.$$

Ainsi,
$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| = \left|1 - \mathrm{e}^{-xc} + \mathrm{e}^{-xd}\right| = 1 - \mathrm{e}^{-xc} + \mathrm{e}^{-xd}.$$
Fixons $[a,b] \subset I$. Choisissant $[c,d] \subset I$ avec $c = 0$ et $d \geq b$, on a $[a,b] \subset [c,d]$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a donc
$$\left|\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| = \mathrm{e}^{-xd}.$$
Ceci implique (en traitant séparément le cas $x = 0$ qui est trivial) que
$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| = 1.$$
En particulier, on a pour tout segment $[a,b] \subset I$,
$$\sup_{[c,d] \text{ avec } [a,b]\subset[c,d]\subset I} \ \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_{\mathbb{R}^+} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \geq 1.$$
On en déduit que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ n'est pas convergente sur $\mathbb{R}^+$ uniformément par rapport au paramètre x sur $[0,1]$. L'objet de la prochaine propriété est de montrer que la continuité globale de f sur $X \times I$ et la convergence des intégrales sur I de $t \mapsto f(x,t)$ uniformément par rapport au paramètre x sur X suffit à assurer la continuité de F sur X.

Une condition suffisante de continuité

Propriété 2.3.18 *Soit (X,d) un espace métrique non-vide, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-vide. On se donne une fonction f de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue sur $X \times I$, et telle que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. La fonction*
$$F : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_I f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$
est continue sur X.

Preuve. À $x \in X$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, de sorte que $F(x)$ est bien défini. Soit $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_n : \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{a_n}^{b_n} f(x,t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$
Puisque f est continue sur $X \times I$, elle est continue en restriction à $X \times [a_n,b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété 2.3.1 assure que la fonction F_n est continue sur X pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on a
$$|F(x) - F_n(x)| = \left|\int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t\right|.$$
Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence des intégrales de $t \mapsto f(x,t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X, il existe $[a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset I$ tel que
$$\forall x \in X,\ \forall [c,d] \subset I \text{ avec } [a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset [c,d], \qquad \left|\int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Par exhaustivité de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $[a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset [a_n, b_n]$. Par suite, pour $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\sup_{x\in X} |F(x) - F_n(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur X. Puisque chacune des fonctions F_n est continue sur X, il en est de même de F par le corollaire 1.2.10. ∎

Une condition suffisante de dérivabilité (caractère $\mathcal{C}^1$)

Propriété 2.3.19 *Soit X un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide. Soit f une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue sur $X \times I$. On suppose que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. On suppose de plus que f admet des dérivées partielles premières par rapport à ses d premières variables en tout point de $X \times I$ et que les d fonctions $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ sont continues sur $X \times I$. On suppose enfin que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, l'intégrale de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. La fonction F définie en (2.28) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X, et l'on a*

$$\forall i \in \{1, \cdots, d\},\ \forall x \in X, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t. \tag{2.29}$$

Remarque 2.3.20 *On peut remplacer l'hypothèse "X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$" par "X est un intervalle de $\mathbb{R}$" et avoir la même conclusion (avec les mêmes autres hypothèses) dans la propriété précédente.*

Preuve. On peut travailler comme dans la preuve précédente avec les mêmes fonctions F_n, dont on vérifie cette fois qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur X par la propriété 2.3.4. De plus, cette suite converge vers F uniformément sur X et chaque suite de dérivées partielles $\frac{\partial F_n}{\partial x_i}$ converge uniformément sur X vers $x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\mathrm{d}t$. Par le théorème 1.3.5, il vient que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X et que (2.29) est vérifiée. ∎

2.3.4 Deux conditions suffisantes de convergence uniforme d'intégrales

Propriété 2.3.21 (Critère de Weierstrass pour la convergence uniforme des intégrales) *Soit $I \neq \emptyset$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \neq \emptyset$ un ensemble. Soit f une application de $X \times I$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I. On suppose qu'il existe une fonction g de I dans R^+ (Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I et) absolument intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in X, \quad \forall t \in I, \qquad |f(x,t)| \leq g(t). \tag{2.30}$$

Alors l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I, uniformément par rapport au paramètre x dans X.

Preuve. Remarquons que, si $[a,b] \subset I$ et $[c,d] \subset I$ avec $[a,b] \subset [c,d]$, alors la majoration (2.30) assure que pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_c^a f(x,t)\mathrm{d}t + \int_b^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_c^a f(x,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_b^d f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_c^a |f(x,t)|\mathrm{d}t + \int_b^d |f(x,t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_c^a g(t)\mathrm{d}t + \int_b^d g(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_c^d g(t)\mathrm{d}t - \int_a^d g(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque g est d'intégrale convergente sur I, la propriété 2.2.7 de Cauchy assure qu'il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que pour tout segment $[c,d] \subset I$, on a $\int_c^d g(t)\mathrm{d}t - \int_a^d g(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout segment $[c,d] \subset I$ avec $[a,b] \subset [c,d]$, les majorations précédentes impliquent que

$$\forall x \in X, \qquad \left|\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

La propriété 2.3.15 assure alors que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I uniformément par rapport au paramètre x dans X. ■

Remarque 2.3.22 *L'inégalité* (2.30) *demande une majoration* du module *de l'intégrande à paramètre par une fonction* intégrable sur *I, de manière* indépendante *du paramètre x dans X.*

On présente le critère suivant, dit d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales, sur un intervalle de la forme $I = [a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On peut bien sûr écrire un théorème similaire (en exercice) sur $]a,b]$ lorsque $-\infty \leq a < b < +\infty$.

Propriété 2.3.23 (Critère d'Abel pour la convergence uniforme des intégrales) *Soit $I = [a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $X \neq \emptyset$ un ensemble. Soit u une fonction de $X \times I$ dans C, telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est Riemann-intégrable sur tout segment inclus dans I et il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in X, \quad \forall c \in [a,b[, \qquad \left|\int_a^c u(x,t)\mathrm{d}t\right| \leq M.$$

Soit v une fonction de $X \times I$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto v(t,x)$ est décroissante sur $[a,b[$ et est de limite nulle en b^- de manière uniforme par rapport à $x \in X$, c'est-à-dire telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists c_\varepsilon \in [a,b[, \quad \forall x \in X, \quad \forall t \in [c_\varepsilon, b[, \qquad |v(x,t)| < \varepsilon.$$

Alors la fonction $f = uv$ a la propriété suivante : l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur I, uniformément par rapport au paramètre x dans X.

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve de la propriété 2.2.22, et de s'apercevoir que, grâce aux hypothèses de la propritété 2.3.23, les majorations s'obtienent de manière uniforme par rapport à $x \in X$. ■

2.3.5 Des théorèmes de Fubini

Considérons une fonction f est définie sur un produit $I \times J$ d'intervalles de $\mathbb{R}$. Supposons d'une part que pour tout $x \in I$, $y \mapsto f(x,y)$ est d'intégrale convergente sur J et que la fonction $x \mapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est d'intégrale convergente sur I. Supposons d'autre part que pour tout $y \in J$, $x \mapsto f(x,y)$ est d'intégrale convergente sur I et que la fonction $y \mapsto \int_I f(x,y)\mathrm{d}x$ est d'intégrale convergente sur J. On donne dans ce paragraphe des conditions suffisantes pour assurer que

$$\int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y,$$

sous le nom que l'on présente sous le nom de théorèmes de Fubini.

Théorème 2.3.24 (de Fubini sur un produit de segments) *Soit $[a,b]$ et $[c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$. On se donne une fonction f continue de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$. On a que, pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur le segment $[c,d]$. De plus, la fonction $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur ce segment. De même, on a que pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur le segment $[a,b]$. De plus, la fonction $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ est continue sur $[c,d]$ donc intégrable sur ce segment. Enfin, on a*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{2.31}$$

Preuve. Soit $B \in [a,b]$. La continuité des applications $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ sur $[a,B]$ et $[c,d]$ respectivement découle de la continuité de f sur $[a,B] \times [c,d]$ et de la propriété 2.3.1. Pour $B = b$, on justifie ainsi le début des conclusions du théorème. Pour $B \in [a,b]$ quelconque, on pose

$$F(B) = \int_a^B \left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad G(B) = \int_c^d \left(\int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

La continuité de l'application $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ sur $[a,b]$ implique que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et pour tout $B \in [a,b]$,

$$F'(B) = \int_c^d f(B,y)\mathrm{d}y,$$

par un théorème de CDI1 inclus et rappelé dans la propriété 2.1.68. Par la même propriété, et par continuité de f sur $[a,b] \times [c,d]$, pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $B \mapsto \int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et sa dérivée en B vaut $f(B,y)$. Puisque cette dernière fonction de (B,y) est continue sur $[a,b] \times [c,d]$, et puisque $(y,B) \mapsto \int_a^B f(x,y)\mathrm{d}x$ l'est également (par la propriété 2.3.10), la propriété 2.3.4 assure finalement que la fonction B est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et l'on a pour tout $B \in [a,b]$,

$$G'(B) = \int_c^d f(B,y)\mathrm{d}y.$$

Remarquant alors que la fonction $F - G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ et de dérivée nulle, elle y est constante. Puisqu'elle est nulle en $B = a$, il vient qu'elle est identiquement nulle sur $[a,b]$. La relation $F(B) = G(B)$ fournit finalement (2.31). ∎

Théorème 2.3.25 (de Fubini sur le produit d'un segment et d'un intervalle) *Soit* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *et* I *un intervalle non vide. Soit* f *une fonction continue de* $[a, b] \times I$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que l'intégrale de* $t \mapsto f(x, t)$ *converge sur* I *uniformément par rapport au paramètre* x *dans* $[a, b]$*. Sous ces hypothèses, d'une part, la fonction*

$$F : \begin{pmatrix} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_I f(x, t)\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

est continue sur $[a, b]$*, d'autre part, la fonction*

$$G : \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

est continue sur I*. De plus, l'intégrale de* G *converge sur* I *et l'on a*

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_I G(t)\mathrm{d}t, \tag{2.32}$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_a^b \left(\int_I f(x, t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_I \left(\int_a^b f(x, t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t. \tag{2.33}$$

Preuve. La continuité de f sur $[a, b] \times I$ implique celle de G sur I par la propriété 2.3.1. La continuité de f sur $[a, b] \times I$ et la convergence des intégrales de $t \mapsto f(x, t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x dans $[a, b]$ implique la continuité de F sur $[a, b]$ par la propriété 2.3.18. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de segments de I. Fixons $\varepsilon > 0$. Par convergence des intégrales de $t \mapsto f(x, t)$ sur I uniformément par rapport au paramètre x sur $[a, b]$ (voir la remarque 2.3.17), il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, et tout $x \in [a, b]$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f(x, t)\mathrm{d}t - \int_I f(x, t)\mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Par suite, on a pour tout $N \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \int_a^b \int_{a_n}^{b_n} f(x, t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_a^b \int_I f(x, t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Par le théorème 2.3.24, on obtient, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, par continuité de f sur $[a, b] \times [a_n, b_n]$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci s'écrit encore, pour $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} G(t)\mathrm{d}t - \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, l'intégrale de G converge sur I et l'on a (2.32), donc (2.33). ∎

Théorème 2.3.26 (de Fubini sur un produit d'intervalles) *Soit* I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *non vides. Soit* f *une fonction continue de* $I \times J$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose qu'il existe une fonction* g

de I dans $\mathbb{R}^+$, absolument intégrable sur I et une fonction h de J dans $\mathbb{R}^+$, absolument intégrable sur J telles que

$$\forall x \in I, \quad \forall y \in J, \qquad |f(x,y)| \leq g(x)h(y). \tag{2.34}$$

Sous ces hypothèses, la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur I et la fonction $G : t \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}x$ est continue sur J. De plus, F est absolument intégrable sur I, G est absolument intégrable sur J, et l'on a

$$\int_I F(x)\mathrm{d}x = \int_J G(t)\mathrm{d}t, \tag{2.35}$$

c'est-à-dire

$$\int_I \left(\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,t)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t. \tag{2.36}$$

Preuve. Montrons que F est continue sur I. Pour cela, commençons par montrer que l'intégrale de $t \mapsto f(x,t)$ converge sur J uniformément par rapport au paramêtre t sur tout segment de I. Soit donc $[\alpha, \beta] \subset I$. Puisque g est absolument intégrable sur I, elle est Riemann-intégrable sur le segment $[\alpha, \beta]$, donc elle est bornée sur $[\alpha, \beta]$. Utilisant l'hypothèse (2.34), il vient que

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad \forall y \in J, \qquad |f(x,t)| \leq \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} h(y). \tag{2.37}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque h est absolument intégrable sur J, il existe $[a^\varepsilon, b^\varepsilon] \subset J$ tel que pour tout $[c,d] \subset J$, contenant $[a^\varepsilon, b^\varepsilon]$,

$$\left| \int_c^d h(y)\mathrm{d}y - \int_{a^\varepsilon}^{b^\varepsilon} h(y)\mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{1 + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}.$$

Compte tenu du fait que la fonction h est positive sur I, ceci s'écrit encore grâce à la relation de Chasles de la propriété 2.1.9,

$$0 \leq \int_c^{a^\varepsilon} h(y)\mathrm{d}y + \int_{b^\varepsilon}^{d^\varepsilon} h(y)\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{1 + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}. \tag{2.38}$$

On peut alors écrire, pour tout $[c,d] \subset J$ contenant $[a^\varepsilon, b^\varepsilon]$, et tout $x \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y - \int_{a^\varepsilon}^{b^\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y \right| &= \left| \int_c^{a^\varepsilon} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{b^\varepsilon}^d f(x,y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_c^{a^\varepsilon} |f(x,y)|\mathrm{d}y + \int_{b^\varepsilon}^d |f(x,y)|\mathrm{d}y \\
&\leq \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \int_c^{a^\varepsilon} h(y)\mathrm{d}y + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]} \int_{b^\varepsilon}^d h(y)\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{\|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}}{1 + \|g\|_{\infty,[\alpha,\beta]}} \varepsilon < \varepsilon,
\end{aligned}$$

en utilisant successivement la relation de Chasles de la propriété 2.1.9, une inégalité triangulaire puis la propriété 2.1.11 et enfin la majoration (2.37) et l'inégalité (2.38). Cette majoration valant pour tout $x \in [a,b]$, il vient que l'intégrale de $y \mapsto f(x,y)$ converge sur J uniformément par rapport au paramètre x dans $[\alpha, \beta]$. Par continuité de f sur $[\alpha, \beta] \times J$, la propriété 2.3.18 assure que F est continue sur $[\alpha, \beta]$. Ceci valant pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, il vient que F est continue sur I tout entier. Un raisonnement similaire, laissé en exercice au lecteur, fournit la continuité de G sur J.

Montrons maintenant que la fonction F est absolument intégrable sur I. Pour cela, considérons un segment $[\alpha,\beta]\subset I$ et observons que, en utilisant la propriété 2.1.59 et en intégrant l'inégalité 2.34,

$$\forall x\in[\alpha,\beta],\qquad |F(x)|=\left|\int_J f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leq\int_J|f(x,y)|\mathrm{d}y\leq g(x)\int_J h(y)\mathrm{d}y.$$

Par conséquent, on a

$$\int_\alpha^\beta|F(x)|\mathrm{d}x\leq\left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_J h(y)\mathrm{d}y\right)\leq\left(\int_I g(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_J h(y)\mathrm{d}y\right),$$

en utilisant à nouveau la positivité de g. Puisque cette dernière borne est (finie et) indépendante du segment $[\alpha,\beta]$ de I, il vient que F est absolument intégrable sur I. On obtient l'intégrabilité absolue de G sur J par un raisonnement symétrique laissé en exercice au lecteur.
Montrons enfin la relation (2.36), qui équivaut à (2.35). Pour cela, considérons une suite exhaustive $([\alpha_n,\beta_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de segments de I. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, par continuité de f sur $[a_n,b_n]\times J$ et par convergence des intégrales de $y\mapsto f(x,y)$ sur J uniformément par rapport au paramètre x dans $[a_n,b_n]$ montrée en début de preuve, il vient par le théorème 2.3.25 que

$$\int_{a_n}^{b_n}F(x)\mathrm{d}x=\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_J\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Par suite, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{b_n}F(x)\mathrm{d}x-\int_J G(y)\mathrm{d}y &= \int_J\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\int_J\left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_J\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Abusant un peu la notation intégrale et en désignant par $I\setminus[a_n,b_n]$ la réunion des 0, 1 ou 2 intervalles qui composent cet ensemble, en fonction des cas, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $y\in J$,

$$\left|\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{J\setminus[a_n,b_n]}f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leq h(y)\int_{I\setminus[a_n,b_n]}g(x)\mathrm{d}x,$$

d'où l'on tire pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_J\left(\int_{a_n}^{b_n}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_I f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right|\leq\left(\int_J h(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_{I\setminus[a_n,b_n]}g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Ceci implique pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_{a_n}^{b_n}F(x)\mathrm{d}x-\int_J G(y)\mathrm{d}y\right|\leq\left(\int_J h(y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_I g(x)\mathrm{d}x-\int_{a_n}^{b_n}g(x)\mathrm{d}x\right).$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par absolue intégrabilité de g sur I (et de h sur J). On en déduit que (2.35), donc (2.36). ∎

2.4 Application à la régularisation par convolution

2.4.1 Approximations de l'identité

Propriété 2.4.1 *Il existe une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, d'intégrale (absolument) convergente sur $\mathbb{R}$, telle que ρ et toutes ses dérivées tendent vers* 0 *en $-\infty$ et en $+\infty$ et* *telle que* $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\mathrm{d}x = 1$.

Preuve. On peut par exemple considérer la fonction

$$\rho : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} \end{pmatrix},$$

et utiliser le ŕesultat de l'exercice 2.3.9 qui assure que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et nulle en dehors d'un compact, convenablement normalisée, convient également. ■

On désigne par ρ une telle fonction dans la suite de cette section. On désigne par $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\rho_n : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{\varepsilon_n}\rho(\frac{y}{\varepsilon_n}) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Propriété 2.4.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, d'intégrale (absolument) convergente sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$. De plus, ρ_n et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.*

Preuve. Exercice. ■

Propriété 2.4.3 *La fonction ρ et toutes ses dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour chacun des fonctions ρ_n pour $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Exercice. ■

Définition 2.4.4 (de la convolution) *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \rho(x-y)f(y)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on pose*

$$\rho \star f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Preuve. Puisque la fonction ρ est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après la propriété 2.4.3, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \rho(x) \leq M$. Par suite, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |\rho(x-y)f(y)| \leq M|f(y)|.$$

■

Propriété 2.4.5 *Soit f une continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction*

$$\rho \star f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \end{pmatrix},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (\rho \star f)^{(k)} = \left(\rho^{(k)}\right) \star f. \tag{2.41}$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $F : (x,y) \mapsto \rho(x-y)f(y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x à tout ordre inférieur ou égal à k en tout point de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$et l'on a, pour tout $p \in \{0,\cdots,k\}$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y) = \rho^{(p)}(x-y)f(y).$$

Cette fonction est par ailleurs continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ quel que soit $p \in \{1,\cdots,k\}$. Puisque, par la propriété 2.4.3, la fonction ρ et toutes ses dérivées de ρ sont bornées sur $\mathbb{R}$, on sait que pour tout $p \in \{0,\cdots,k\}$, il existe $M_p > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $|\rho^{(p)}(X)| \leq M_p$. Par suite, pour tout $p \in \{0,\ldots,k\}$, on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y)\right| \leq M_p|f(y)|.$$

Puisque la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, cette dernière majoration implique que l'intégrale de $y \mapsto \frac{\partial^p F}{\partial x^p}(x,y)$ converge (absolument) sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre $x \in \mathbb{R}$. Utilisant la propriété 2.3.19 k fois, on obtient que la fonction $\rho\star f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$,..., et ce classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ (car les dérivées successives sont continues par convergence uniforme des intégrales d'une fonction globalement continue) et pour tout $p \in \{0,\ldots,k\}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\rho\star f)^{(p)}(x) = \left(\left(\rho^{(k)}\right)\star f\right)(x).$$

■

Propriété 2.4.6 *Soit f une continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\rho\star f$ ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.*

Preuve. D'après la propriété précédente, et vu l'identité (2.41), il suffit de montrer le résultat pour $\rho\star f$, car le même raisonnement vaudra pour les dérivées successives de $\rho\star f$, sous réserve de ne pas utiliser la positivité de ρ et le fait que cette fonction est d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque ρ tend vers 0 en $\pm\infty$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}$ tel que $|X| \geq R$, on a

$$0 \leq \rho(X) \leq \frac{\varepsilon}{2(\int_R |f(t)|\mathrm{d}t + 1)}.$$

Écrivons alors, à l'aide de la propriété 2.1.62, pour $x \in \mathbb{R}$, puisque l'intégrale de $y \mapsto \rho(x-y)f(y)$ converge absolument sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{x-R}^{x+R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y. \quad (2.42)$$

Majorons tout d'abord la valeur absolue de chacun des deux derniers termes de cette égalité. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right| &\leq \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{-\infty}^{x-R} |f(y)|\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \left|\int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y\right| &\leq \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)|f(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{x+R}^{+\infty} |f(y)|\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{-\infty}^{x-R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_{x+R}^{+\infty} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y + 1)} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, par la propriété 2.2.5, il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus [-R_1, R_1]$, on a $\int_a^b |f(y)|\mathrm{d}y \leq \varepsilon/(2(\|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} + 1))$. Observons que, si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $|x| > R + R_1$, alors $[x-R, x+R] \subset \mathbb{R} \setminus [-R_1, R_1]$. Ceci implique que, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R + R_1$,

$$\left| \int_{x-R}^{x+R} \rho(x-y)f(y)\mathrm{d}y \right| \leq \|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} \int_{x-R}^{x+R} |f(y)|\mathrm{d}y \leq \|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{2(\|\rho\|_{\infty,\mathbb{R}} + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par inégalité triangulaire dans (2.42), il vient que pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| > R + R_1$, on a

$$|\rho \star f(x)| \leq \varepsilon.$$

■

Propriété 2.4.7 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On désigne par ρ_n la suite de fonctions définie en* (2.39)*. Dans ce cas,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\rho_n \star f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x). \tag{2.43}$$

Remarque 2.4.8 *Notons $\mathcal{C}^{\infty}_{\to 0}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$ ainsi que toutes leurs dérivées. Notons $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Sous les hypothèses précédentes, la suite de fonctions $\rho_n \star f$ converge donc ponctuellement vers la fonction f. C'est pourquoi la suite d'applications linéaires $\rho_n \star \cdot$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par*

$$\rho_n \star : \begin{pmatrix} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\infty}_{\to 0}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \rho_n \star f \end{pmatrix},$$

est appelée approximation de l'identité.

Remarque 2.4.9 *Le résultat précédent affirme que toute fonction continue bornée absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ est limite simple d'une suite de fonctions de $\mathcal{C}^{\infty}_{\to 0}$.*

Remarque 2.4.10 *Une version continue de la propriété précédente est que, sous les mêmes hypothèses,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} f(x). \tag{2.44}$$

Preuve. Nous allons montrer la version (2.44) du résultat. La version (2.43) suivra par composition de limites puisque $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, écrivons, à l'aide de la propriété 2.1.74, que

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) f(x-u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(x-\varepsilon u)\mathrm{d}u.$$

Par la propriété 2.4.1, on a $\int_R \rho(u)\mathrm{d}u = 1$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u) f(x-\varepsilon u)\mathrm{d}u - f(x) \int_{\mathbb{R}} \rho(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(u) \left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Notons $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. Fixons $\delta > 0$ et observons que, par absolue intégrabilité de ρ sur $\mathbb{R}$, par la propriété 2.2.8, il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-R} \rho(u)\mathrm{d}u + \int_{R}^{+\infty} \rho(u)\mathrm{d}u < \frac{\delta}{4M}.$$

Ceci implique en particulier que

$$\left|\int_{-\infty}^{-R} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| + \left|\int_{R}^{+\infty} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| \leq 2M\frac{\delta}{4M} = \delta/2. \quad (2.46)$$

Par ailleurs, par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in [x-\eta, x+\eta]$, $|f(x-y) - f(x)| < \delta/2$. En particulier, si l'on suppose $\varepsilon < \eta/R$, alors on a

$$\forall u \in [-R, R], \qquad |f(x-\varepsilon u) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Ceci implique que, pour $\varepsilon < \eta/R$, on a

$$\left|\int_{-R}^{R} \rho(u)\left(f(x-\varepsilon u) - f(x)\right)\mathrm{d}u\right| \leq \frac{\delta}{2}\int_{-R}^{R} \rho(u)\mathrm{d}u \leq \frac{\delta}{2}. \quad (2.47)$$

Utilisant la relation de Chasles de la propriété 2.1.62 dans l'intégrale dans le membre de droite de (2.45) (l'intégrande étant absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ comme produit de la fonction absolument intégrable ρ par la somme de deux fonctions bornées sur $\mathbb{R}$) en utilisant les intervalles $]-\infty, -R]$, $[-R, R]$ et $[R, +\infty[$, on conclut par inégalité triangulaire que, dès que $\varepsilon < \eta/R$, on a

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y - f(x)\right| \leq \delta,$$

à l'aide des inégalités (2.46) et (2.47). ■

Propriété 2.4.11 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, bornée et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On désigne par ρ_n la suite de fonctions définie en* (2.39)*. Dans ce cas sur tout compact K non vide de $\mathbb{R}$, on a*

$$\sup_{x\in K} \left|\left(\rho_n \star f\right)(x) - f(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (2.48)$$

Autrement dit : la suite $\rho_n \star f$ converge vers f uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.12 *Une version continue de la propriété séquentielle est que, sous les mêmes hypothèses, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ non vide,*

$$\sup_{x\in K}\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y - f(x)\right| \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ non vide. Il existe $R_1 > 0$ tel que $K \subset [-R_1, R_1]$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur le segment $[-R_1 - 1, R_1 + 1]$, donc elle est uniformément continue sur ce segment par le théorème de Heine. Fixons $\delta > 0$. Comme dans la preuve de la propriété précédente, il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'estimation (2.46) a lieu (en notant toujours $M > 0$ un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$). Par uniforme continuité de f sur $[-R_1 - 1, R_1 + 1]$, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tous $u, v \in [-R_1 - 1, R_1 + 1]$, $|f(u) - f(v)| < \delta/2$. En particulier, si $\varepsilon \in]0, \min(\eta, 1)/R[$, on a pour tout $x \in [-R_1, R_1]$, et tout $u \in [-R, R]$, $x - \varepsilon u \in [-R_1 - 1, R_1 + 1]$

et donc $|f(x-\varepsilon u) - f(x)| < \delta/2$. Ainsi, dans le même esprit que pour (2.47), on a

$$\forall x \in [-R_1, R_1], \quad \forall \varepsilon \in]0, \min(1,\eta)/R[, \qquad \left| \int_{-R}^{R} \rho(y) \left(f(x-\varepsilon u) - f(x) \right) \mathrm{d}u \right| \leq \frac{\delta}{2} \int_{-R}^{R} \rho(u) \mathrm{d}u \leq \frac{\delta}{2}.$$

On conclut comme à la propriété précédente par inégalité triangulaire après relation de Chasles dans le second membre de l'égalité (2.45), les estimations étant uniformes en x sur $[-R_1, R_1]$ (donc sur K). ∎

2.4.2 Le théorème d'approximation de Weierstrass

Théorème 2.4.13 (d'approximation de Weierstrass) *Soit $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$.*

Preuve. Étape 1 : Prolongement et changement de variable. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Notons $\tilde{f}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui coïncide avec f sur $[a,b]$, qui est nulle sur $]-\infty, a-1]$ et sur $[b+1,+\infty[$, qui est affine sur $[a-1,a]$ et sur $[b,b+1]$, et qui est globalement continue sur $\mathbb{R}$. Posons φ la bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = (b-a+2)t + \frac{b-a}{2}$. Observons que $\varphi([-1/2,1/2]) = [a-1,b+1]$ et que φ préserve les fonctions polynomiales : pour toute fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, h est polynomiale sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $h \circ \varphi$ l'est. Posons $g = \tilde{f} \circ \varphi$. Remarquons que g est continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$. Soit $\varepsilon > 0$. Si l'on montre qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|g - Q\|_{\infty,[-1/2,1/2]} < \varepsilon$, alors on aura que $P = Q \circ (\varphi^{-1}) \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\|f-P\|_{\infty,[a-1,b+1]} < \varepsilon$, et en particulier $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} < \varepsilon$.
Étape 2 : Étude d'une suite de noyaux de convolution. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$h_k : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (1-x^2)^k & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Observons que, quel que soit $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction h_k est continue et positive sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, mais nulle en dehors de $[-1,1]$. En particulier, elle est (absolument) intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\alpha_k = \int_{\mathbb{R}} h_k(x)\mathrm{d}x > 0$. On peut ainsi définit la fonction normalisée $\rho_k = h_k/\alpha_k$, de sorte que ρ_k est continue et positive sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1,1]$, absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et d'intégrale égale à 1. Observons par ailleurs que, pour tout $k \geq 1$,

$$\alpha_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k \mathrm{d}t = 2\int_0^1 (1-t^2)^k \mathrm{d}t \leq 2 \int_0^1 (1-t)^k \mathrm{d}t = \frac{2}{k+1}. \tag{2.49}$$

Montrons que pour tout $\delta \in]0,1[$, la fonction ρ_k converge uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[$. Fixons $\delta \in]0,1[$. Pour $x \in]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[$, et $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\delta^2 \leq x^2$ et donc $1-x^2 \leq 1-\delta^2$. Ainsi, en utilisant (2.49),

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \forall x \in]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[, \qquad 0 \leq \rho_k(x) \leq \frac{(1-\delta^2)^k}{\alpha_k} \leq \frac{k+1}{2}(1-\delta^2)^k. \tag{2.50}$$

Puisque ce dernier majorant tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, ceci démontre que $(\rho_k)_{k \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $]-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty[$.
Étape 3 : On approche la fonction f par convolution avec la suite de noyaux Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction $t \mapsto \rho_k(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $[-1/2,1/2]$, donc

intégrable sur $\mathbb{R}$ et l'on peut définir

$$g_k(x) = \rho_k \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, la fonction g_k est polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$. D'une part, pour $x \in [-1/2, 1/2]$, et $t \in [-1/2, 1/2]$, on a $x - t \in [-1, 1]$, de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\rho_k(x-t) = \left(1-(x-t)^2\right)^k$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, il existe $2k+1$ fonctions polynomiales sur $[-1/2, 1/2]$, notées $a_0^k, ..., a_{2k}^k$ telles que pour tout $(x, t) \in [-1/2, 1/2]$,

$$\forall (x,t) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2, \qquad \rho_k(x-t) = a_{2k}^k(t)x^{2k} + a_{2k-1}^k(t)x^{2k-1} + \cdots + a_1^k(t)x + a_0^k(t).$$

Multipliant par $g(t)$ et intégrant sur $[-1/2, 1/2]$, on trouve par linéarité de l'intégrale sur $[-1/2, 1/2]$, pour tout $k \geq 1$,

$$g_k(x) = x^{2k} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_{2k}^k(t)g(t)\mathrm{d}t + \cdots + x\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_1^k(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a_0^k(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que pour tout $k \geq 1$, la fonction g_k est polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$. Montrons maintenant que g_k converge vers g uniformément sur $[-1/2, 1/2]$. Pour cela, écrivons que, pour $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
g_k(x) - g(x) &= \int_R \rho_k(x-t)g(t)\mathrm{d}t - g(x)\int_{\mathbb{R}} \rho_k(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho_k(u)g(x-u)\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_k(u)\mathrm{d}u \qquad (2.51)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{-1}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u. \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

Notons toujours ε le nombre réel strictement positif fixé à la fin de la première étape ci-dessus. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur le segment $[-3/2, 3/2]$. Par le théorème de Heine, elle est donc uniformément continue sur $[-3/2, 3/2]$. Ainsi, il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$ et tout $u \in [-\delta, \delta]$, $|g(x-u) - g(x)| \leq \varepsilon/2$. Ceci implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\delta}^{\delta} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |g(x-u) - g(x)|\,\rho_k(u)\mathrm{d}u \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} \rho_k(u)\mathrm{d}u \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $|g|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, elle est bornée par un certain $M > 0$ sur $\mathbb{R}$. Ceci implique, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\delta}^{1} \left(g(x-u) - g(x)\right)\rho_k(u)\mathrm{d}u\right| &\leq \int_{\delta}^{1} |g(x-u) - g(x)|\,\rho_k(u)\mathrm{d}u \\
&\leq 2M\int_{\delta}^{1} \rho_k(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On montre de même que, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$\left| \int_{-1}^{-\delta} (g(x-u) - g(x))\, \rho_k(u) \mathrm{d}u \right| \leq 2M \int_{-1}^{-\delta} \rho_k(u) \mathrm{d}u.$$

Utilisant la convergence uniforme de ρ_k vers 0 sur $\mathbb{R} \backslash]-\delta, \delta[$, et plus explicitement la borne (2.50), il vient en additionnant les inégalités précédentes que, pour $k \geq 1$ et $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$\left| \int_{\delta}^{1} (g(x-u) - g(x))\, \rho_k(u) \mathrm{d}u \right| + \left| \int_{-1}^{-\delta} (g(x-u) - g(x))\, \rho_k(u) \mathrm{d}u \right| \leq 2M(1-\delta)(k+1)(1-\delta^2)^k. \tag{2.54}$$

Utilisons finalement la relation de Chasles dans l'égalité (2.52) en découpant le segment $[-1, 1]$ en $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$, puis une inégalité triangulaire, et la majoration (2.53), qui est uniforme en x, on otbient pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [-1/2, 1/2]$,

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \left| \int_{-1}^{-\delta} (g(x-u) - g(x))\, \rho_k(u) \mathrm{d}u \right| + \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{\delta}^{1} (g(x-u) - g(x))\, \rho_k(u) \mathrm{d}u \right|.$$

Enfin, utilisant la majoration précédente, elle aussi uniforme en $x \in [-1/2, 1/2]$, on obtient pour tout $k \geq 1$,

$$\sup_{x \in [-1/2, 1/2]} |g_k(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M(1-\delta)(k+1)(1-\delta^2)^k.$$

Choisissant $k_\varepsilon \geq 1$ assez grand pour que $2M(1-\delta)(k_\varepsilon+1)(1-\delta^2)^{k_\varepsilon} < \varepsilon/2$, il vient que la fonction polynomiale $Q = g_{k_\varepsilon}$ vérifie $\|g - Q\|_{\infty, [-1/2, 1/2]} < \varepsilon$. ∎

Corollaire 2.4.14 *Soit $a < b$ deux nombres réels. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\|f - P\|_{\infty, [a,b]} < \varepsilon$.*

Preuve. Reprendre la preuve du théorème 2.4.13 ligne à ligne lorsque f est à valeurs complexes pour conclure. ∎

2.5 Application à la transformation de Fourier

2.5.1 La classe de Schwartz

Définition 2.5.1 *On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes telles que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |P(x) f^{(\alpha)}(x)| \leq M. \tag{2.55}$$

L'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est appelé classe de Schwartz.

Propriété 2.5.2 *Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes est dans la classe de Schwartz si et seulement si pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a*

$$P(x) f^{(\alpha)}(x) \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 2.5.3 *La classe de Schwartz est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$*.*

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 2.5.4 *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $P \in \mathbb{C}[X]$*, alors* $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*.*
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $f^{(k)} \in \mathcal{S}$*.*
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, alors* $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*.*

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 2.5.5 *Pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et tout* $\xi \in \mathbb{R}$*, la fonction* $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ *est dans la classe de Schwartz.*

Preuve. Exercice. ∎

Propriété 2.5.6 *Si* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, alors* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*.*
C'est-à-dire que les fonctions dans la classe de Schwartz sont absolument intégrables sur $\mathbb{R}$*.*

Preuve. Utilisant par exemple le polynôme $P = 1 + X^2$ dans la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on sait que, puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |(1 + x^2)f(x)| \leq M.$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. En outre, la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq \frac{M}{1 + x^2},$$

assure que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto M/(1 + x^2)$ l'est aussi en utilisant la propriété 2.1.70. ∎

2.5.2 Définition de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Définition 2.5.7 *Pour* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*, on définit la fonction*

$$\mathcal{F}(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Propriété 2.5.8 *La fonction* $\mathcal{F}(f)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et l'on a*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}^k \mathcal{F}(f)}{\mathrm{d}\xi^k}(\xi) = \mathcal{F}((-i\cdot)^k f(\cdot))(\xi). \tag{2.57}$$

Preuve. Montrons tout d'abord que la fonction $\mathcal{F}(f)$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée en $\xi \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathcal{F}(f)'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x$. Pour cela considérons la fonction $g : (\xi, x) \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$. La foncion g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, car elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert. De plus, sa dérivée partielle par rapport à ξ au point $(\xi, x) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par $-ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$. Observons que cette fonction est également continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, on a la majoration

$$\forall (\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad \left| -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x} \right| \leq |xf(x)|,$$

qui assure que l'intégrale de $x \mapsto -ixf(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport à ξ sur $\mathbb{R}$. En effet, le majorant du module de cette fonction est une fonction (absolument) intégrable sur $\mathbb{R}$ (par la propriété 2.5.4), indépendante de ξ. Par la propriété 2.3.19, il vient que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a la formule annoncée. Ceci valant pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on en déduit la propriété 2.5.8 et en particulier (2.57) par stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par multiplication par un polynôme (propriété 2.5.4). ■

Corollaire 2.5.9 *On a également*[4]*,*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(P(-i\cdot)f(\cdot))(\xi).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la propriété précédente, la linéarité de l'intégrale, et la linéarité de la dérivation. ■

Propriété 2.5.10 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On a*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad (i\xi)^k \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\xi). \tag{2.58}$$

Preuve. Montrons la propriété pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $k = 1$. Le cas général s'en déduisant par stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par dérivation (propriété 2.5.4). Soit donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Observons que $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par la propriété 2.5.4. Fixons $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Puisque les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $R > 0$, par intégration par parties,

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x = \left[f(x)\frac{\mathrm{e}^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(x)\frac{\mathrm{e}^{-i\xi i}}{-i\xi}\mathrm{d}x. \tag{2.59}$$

Multiplions par $i\xi/\sqrt{2\pi}$ pour obtenir

$$\frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x} \right]_{-R}^{R} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f'(x)\mathrm{e}^{-i\xi i}\mathrm{d}x.$$

Cette identité est par ailleurs triviale (c'est le théorème fondamental de l'analyse) pour $\xi = 0$. On en déduit qu'elle vaut pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Soit donc $\xi \in \mathbb{R}$. Observons que le terme entre crochets dans l'égalité ci-dessus tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$ car la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ est dans la classe de Schwartz (propriété 2.5.5). De plus, les intégrandes dans les termes du membre de droite et du membre de gauche sont dans la classe de Schwartz (propriétés 2.5.4 et 2.5.5). On en déduit par la propriété 2.5.6 que ce sont deux fonctions absolument intégrales sur $\mathbb{R}$. En particulier, en passant à la limite quand R tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad (i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f')(\xi).$$

Ceci montre (2.58) pour $k = 1$. Le résultat pour tout $k \in \mathbb{N}$ s'en déduit comme indiqué en début de preuve. ■

4. Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)$ l'opérateur différentiel $\sum_{k=0}^{d} a_k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}$.

Corollaire 2.5.11 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a*

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P(i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}\left(P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\right)\right)(\xi).$$

Preuve. C'est une conséquence de la linéarité de l'intégrale et de (2.58). ■

Remarquons à ce stade que l'on a montré que la transformation de Fourier "échange" dérivation par rapport à une variable et multiplication par rapport à $\pm i$ fois l'autre variable. En effet, dériver $\mathcal{F}(f)$ par rapport à ξ revient à calculer $\mathcal{F}((-ix)f(x))(\xi)$ (voir la propriété 2.5.8), et calculer $\mathcal{F}(f')(\xi)$ revient à calculer $(i\xi)\mathcal{F}(f)(\xi)$ (voir la propriété 2.5.10). Il est par ailleurs remarquable que la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, définie par (2.56), vue comme l'application (dont on vérifie aisément qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire),

$$\mathcal{F} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

laisse en fait stable l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, comme on va le voir ci-dessous.

Lemme 2.5.12 (de Riemann–Lebesgue) *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Foit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f étant dans la classe de Schwartz, elle est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.5.6. Par suite, il existe $R > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\varepsilon,$$

par la propriété 2.2.8. Consiérons maintenant $\xi \in \mathbb{R}$ avec $|\xi| \geq 1$. En particulier, $\xi \neq 0$ et l'on peut utiliser la relation (2.59). On en déduit que

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{|f(R)|}{|\xi|} + \frac{|f(-R)|}{|\xi|} + \frac{1}{|\xi|}\int_{-R}^{R}|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction f est dans la classe de Schwartz, elle est bornée par un certain $M > 0$ (définition 2.5.1), et l'on a $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (propriété 2.5.4), donc f' est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ (propriété 2.5.6). On en déduit que pour tout ξ tel que $|\xi| \geq 1$,

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2M}{|\xi|} + \frac{1}{|\xi|}\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

Par relation de Chasles (propriété 2.1.62) et inégalité triangulaire, on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ avec $|\xi| \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{-R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right| + \left|\int_{-R}^{-R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right| + \left|\int_{R}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{-R} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{R}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_{-R}^{-R} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\right| \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\varepsilon + \frac{2M}{|\xi|} + \frac{1}{|\xi|}\int_{\mathbb{R}}|f'(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $|\xi| > \max\left(1, 2(2M + \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\mathrm{d}x)/(\varepsilon\sqrt{2\pi})\right)$, on a

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

∎

Comme annoncé, ceci assure la stabilité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ vue comme en (2.60). C'est l'objet du résultat suivant

Propriété 2.5.13 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. La fonction $\mathcal{F}(f)$ est également dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On sait déjà que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.5.8. Utilisant la propriété 2.5.2, il nous suffit de montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$P(\xi)\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\mathcal{F}(f)(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.61}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Par la propriété 2.5.8, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi).$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Par le corollaire 2.5.10, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad P(\xi)\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}\xi^\alpha}\mathcal{F}(f)(\xi) = P(\xi)\mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi) = \mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]\right)(\xi).$$

On sait depuis la propriété 2.5.4 que $x \mapsto P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]$ est une fonction dans la classe de Schwartz car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Le lemme de Riemann–Lebesgue 2.5.12 assure que

$$\mathcal{F}\left(P\left(\frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)[(-ix)^\alpha f(x)]\right)(\xi) \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que l'on a (2.61) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. ∎

On peut définir la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *via* la formule (2.56) sur des espaces bien plus gros que $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$: il suffit que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour que cette formule soit bien définie. Et si l'on requiert un peu de régularité sur f (par exemple f est dérivable sur $\mathbb{R}$ un certain nombre de fois, de dérivées continues et dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), on peut avoir des formules de type (2.58) pour l'entier k jusqu'à une certaine valeurs. On peut alors comprendre ce résultat comme un "échange" entre f et $\mathcal{F}(f)$: la régularité de f se traduit par de la "décroissance" de $\mathcal{F}(f)$ (au sens où l'on contrôle $|\xi\mathcal{F}(f)(\xi)|$ pour $|\xi|$ grand).

De même, si l'on suppose que f et un certain nombre des premières puissances de x fois f sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors on peut définir $\mathcal{F}(f)$ *via* la formule (2.56) et avoir la dérivabilité de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}$ jusqu'à un certain rang et des formules de type (2.56) jusqu'à un certain entier k. On peut de nouveau interpréter ces propriétés comme un échange : la "décroissance" de f (au sens où l'on contrôle quelques puissances de x fois $f(x)$ pour $|x|$ grand) implique de la régularité sur $\mathcal{F}(f)$.

Ces propriétés, dans leur forme précise, dépassent le cadre du cours. Cependant on peut remarquer que la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un parfait compromis entre les deux aspects : il y a dans cette classe uniquement des fonctions très régulières *et* très "décroissantes" (au sens précédent). Ainsi, les transformées de Fourier des fonctions de la classe de Schwartz sont très "décroissantes" *et* très régulières. Au point que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Nous allons être encore plus précis dans la section 2.5.4, en montrant que $\mathcal{F}$ est en fait un endomorphise de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (application linéaire bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même ; on ne parlera pas de sa continuité éventuelle, car on ne parlera pas de la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$), et expliciter sa bijection réciproque.

2.5.3 Transformée de Fourier d'une gaussienne

On rappelle que l'on a montré à l'exercice 2.3.9 que

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}. \tag{2.62}$$

Exercice 2.5.14 *Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction*

$$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-ax^2} \end{pmatrix}$$

1. *Justifier que la fonction f est dans la classe de Schwartz.*
2. *Justifier que $\mathcal{F}(f)(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.*
3. *Justifier que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathcal{F}(f)}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

4. *À l'aide du cours sur les équations différentielles (voir chapitre ? ? ?), en déduire que*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \tag{2.63}$$

2.5.4 Le théorème d'inversion de Fourier

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit la fonction

$$\mathcal{G}(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{+i\xi x}\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{G}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi).$$

On déduit de cette observation que la fonction $\mathcal{G}$, tout comme la fonction $\mathcal{F}$ (comme on l'a vu en section 2.5.2), est une application (linéaire) de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.

Théorème 2.5.15 (d'inversion de Fourier) *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(x) = f(x) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x). \tag{2.64}$$

Remarque 2.5.16 *Une autre maniere d'écrire ce théorème est la suivante :*

$$\mathcal{F}\circ\mathcal{G} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{G}\circ\mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})}.$$

En particulier, les applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même que sont $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont injectives et surjectives, et inverses l'une de l'autre.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $X \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction

$$h_\varepsilon : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,\xi) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{e}^{+i\xi X} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad |h_\varepsilon(x,y)| \le |f(x)|\mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2},$$

et le majorant s'écrit comme le produit d'une fonction de la première variable et d'une fonction de la seconde variable, chacune étant dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$. Par le théorème de Fubini 2.3.26, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_R h_\varepsilon(x,\xi)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_R h_\varepsilon(x,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{+i\xi X}\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2}\mathrm{e}^{-i\xi(x-X)}\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x.$$

Ceci implique

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(\varepsilon\xi)^2} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{+i\xi X}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x-X)\mathrm{d}x. \tag{2.65}$$

À l'aide de la relation (2.63) de l'exercice 2.5.14, on peut écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x-X) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-X)^2}{4\varepsilon^2}}.$$

On peut ainsi écrire le membre de droite de (2.65),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x-X)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(X-x)^2}{4\varepsilon^2}}\mathrm{d}x. \tag{2.66}$$

En définissant la fonction ρ pour $u \in \mathbb{R}$ par $\rho(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/4}$, on a une fonction de la classe de Schwartz à valeurs positives, et d'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2} \times \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-v^2}\mathrm{d}v = 1,$$

en utilisant (2.62). Utilisant la relation (2.66), on peut donc écrire le membre de droite de (2.65) sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\varepsilon^2\xi^2})(x-X)\mathrm{d}x = \int_R f(x) \times \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{X-x}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction f est dans la classe de Schwartz, elle est continue, bornée, et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. La propriété 2.4.7, sous la forme (2.44), assure que le membre de droite de (2.65) tend vers $f(X)$ quand ε tend vers 0. Considérons maintenant le membre de gauche de (2.65). Observons que la fonction

$$g : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\delta,\xi) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\delta^2\xi^2}\mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{i\xi X} \end{pmatrix}.$$

Puisque la fonction f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il en est de même de la fonction $\mathcal{F}(f)$ par la propriété 2.5.13. En particulier, cette dernière fonction est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. De plus, on a la majoration

$$\forall (\delta,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \qquad |g(\delta,\xi)| \le |\mathcal{F}(f)(\xi)|,$$

et le majorant est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ indépendante de δ. Ceci assure que l'intégrale de $\xi \mapsto g(\delta,\xi)$ converge sur $\mathbb{R}$, uniformément par rapport au paramètre δ dans $\mathbb{R}$. Par suite, la propriété 2.3.18 assure que la fonction

$$G : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \delta & \longrightarrow & \int_{\mathbb{R}} g(\delta,\xi)\mathrm{d}\xi \end{pmatrix},$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet en particulier une limite en 0, qui est

$$G(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi X}\mathrm{d}\xi = \sqrt{2\pi}\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X).$$

En particulier, le membre de gauche de (2.65) converge vers $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X)$ quand ε tend vers 0. Passant à la limite quand ε tend vers 0 dans (2.65), il vient

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))(X) = f(X).$$

On a ainsi démontré la seconde partie du théorème 2.5.15, au sens où l'on a montré la seconde égalité de (2.64). Pour déduire la seconde égalité de (2.64) de la première, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(X)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-iX\xi}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{iX\xi}\mathrm{d}\xi \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{F}(\overline{f}))(X) \\ &= \overline{f(X)}, \end{aligned}$$

en utilisant le résultat que l'on vient de démontrer (puisque $\overline{f} \in \mathcal{S}$ dès que $f \in \mathcal{S}$). On en déduit en conjuguant le calcul précédent que

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}(f))(X) = f(X),$$

et le théorème est ainsi montré en totalité. ■

Remarque 2.5.17 *Le théorème d'inversion de Fourier assure que, lorsque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on peut écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Toute fonction f dans la classe de Schwartz (on pourrait affaiblir les hypothèses, mais cela dépasse le cadre de ce syllabus) s'écrit ainsi comme une "somme" (continue) de fonctions ondulatoires de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ix\xi}$, affectées de la densité (complexe) $\mathcal{F}(f)(\xi)/\sqrt{2\pi}$, ou du poids (complexe) $\mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{d}\xi/\sqrt{2\pi}$.

Remarque 2.5.18 *Si l'on interprète la variable x comme une variable temporelle, alors la variable ξ est naturellement une pulsation, et $\xi/(2\pi)$ est naturellement une fréquence.*

Remarque 2.5.19 *Le fait que $\mathcal{F}$ est bijective implique en particulier qu'il y a exactement autant d'information dans f que dans $\mathcal{F}(f)$: connaître f ou connaître $\mathcal{F}(f)$ sont deux choses rigoureusement équivalentes.*

2.5.5 La convolution dans la classe de Schwartz

Lemme 2.5.20 (Inégalité de Young) *Pour tout $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$, on a*

$$\forall u, v \geq 0, \qquad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}. \tag{2.67}$$

Preuve. C'est évident si $u = 0$ ou $v = 0$. On suppose donc que $u > 0$ et $v > 0$. On peut donc poser

$$U = p\ln(u) \qquad \text{et} \qquad V = q\ln(v).$$

Puisque la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et puisque $1/p \geq 0$, $1/q \geq 0$ et $1/p + 1/q = 1$, on a

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{p}U + \frac{1}{q}V} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^U + \frac{1}{q}\mathrm{e}^V.$$

Ceci s'écrit encore

$$\mathrm{e}^{\ln(u)+\ln(v)} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^{p\ln u} + \frac{1}{q}\mathrm{e}^{q\ln v}.$$

On en déduit aisément (2.67) ■

Lemme 2.5.21 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, il existe $C_\alpha > 0$ tel que*

$$\forall a, b \geq 0, \qquad (a+b)^\alpha \leq C_\alpha \left(a^\alpha + b^\alpha\right).$$

De plus, on peut choisir $C_\alpha = 2^{\alpha-1}$.

Preuve. Le résultat est trivial pour $\alpha = 0$ avec $C_0 = \frac{1}{2}$, et pour $\alpha = 1$ avec $C_1 = 1$. Raisonnons par récurrence. Afin de montrer l'hérédité, supposons le résultat vrai pour un certain $\alpha \geq 1$. Pour tout $a, b \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^{\alpha+1} &\leq (a+b)^\alpha(a+b)\\ &\leq C_\alpha\left(a^\alpha + b^\alpha\right)(a+b)\\ &\leq C_\alpha\left(a^{\alpha+1} + a^\alpha b + b^\alpha a + b^{\alpha+1}\right).\end{aligned}$$

Or, par inégalité de Young (lemme 2.5.20), on a

$$a^\alpha b \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}a^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}b^{\alpha+1} \qquad \text{et} \qquad b^\alpha a \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}b^{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1}a^{\alpha+1}.$$

On en déduit que

$$(a+b)^{\alpha+1} \leq C_\alpha\left(2a^{\alpha+1} + 2b^{\alpha+1}\right).$$

Le résultat suit alors avec $C_{\alpha+1} = 2C_\alpha$ au rang $\alpha + 1$. ■

Propriété 2.5.22 (La convolution laisse stable $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) *Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit la fonction*

$$f \star g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \end{pmatrix}.$$

La fonction $f \star g$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie (2.55) *pour tout polynôme P, de sorte qu'elle est elle-même dans la classe de Schwartz.*

Remarque 2.5.23 *On généralise ainsi le produit de convolution introduit à la définition 2.4.4.*

Preuve. L'intégrande

$$h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & f(y)g(x-y) \end{pmatrix},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, puisque f et g sont dans la classe de Schwartz. De plus, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$, on a

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y) = f(y)g^{(\alpha)}(x-y).$$

Désignant par $M_\alpha \geq 0$ un majorant de $|g^{(\alpha)}|$ sur $\mathbb{R}$ (qui existe puisque g est dans la classe de Schwartz). Puisque f est également dans la classe de Schwartz, il existe $M>0$ tel que

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad (1+y^2)|f(y)| \leq M.$$

On en déduit que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \left|\frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y)\right| \leq M_\alpha \frac{M}{1+y^2}.$$

On déduit de la propriété 2.3.21 que l'intégrale de $y\mapsto \frac{\partial^\alpha h}{\partial x^\alpha}(x,y)$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre x sur $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}$. Utilisant la propriété 2.3.19, il vient que $f\star g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \alpha\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\qquad (f\star g)^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g^{(\alpha)}(x-y)\mathrm{d}y. \tag{2.68}$$

Justifions maintenant que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$, la fonction $x\mapsto x^\beta g^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Fixons $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$ et observons que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad x^\beta g^{(\alpha)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\mathrm{d}y.$$

Majorons le module de l'intégrande en remarquant que, pour $x,y\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left|f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right| &\leq |f(y)||(x-y)+y|^\beta |g^{(\alpha)}(x-y)| \\ &\leq C_\beta\left(\left|y^\beta f(y)g^{(\alpha)}(x-y)\right| + \left|f(y)(x-y)^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right|\right). \end{aligned}$$

Puisque $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $M_\beta>0$ et $M>0$ tels que

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad \left|(1+y^2)y^\beta f(y)\right| \leq M_\alpha \qquad \text{et} \qquad \left|(1+y^2)f(y)\right| \leq M.$$

De même, puisque $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $N_{\alpha,\beta}>0$ et $N_\alpha>0$ tels que

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad \left|g^{(\alpha)}(y)\right| \leq N_\alpha \qquad \text{et} \qquad \left|(y)^\beta g^{(\alpha)}(y)\right| \leq N_{\alpha,\beta}.$$

On déduit de ces dernières inégalités que

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\qquad \left|f(y)x^\beta g^{(\alpha)}(x-y)\right| \leq C_\alpha\left(N_\alpha\frac{M_\alpha}{1+y^2} + N_{\alpha,\beta}\frac{M}{1+y^2}\right).$$

Utilisant (2.68), il vient par intégration que

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \left|x^\beta g^{(\alpha)}(x)\right| \leq \pi C_\alpha\left(N_\alpha M_\alpha + N_{\alpha,\beta}M\right).$$

Ainsi, la fonction $x\mapsto x^\beta g^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ceci valant pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$, on en déduit que pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$ et tout $\alpha\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto P(x)g^{(\alpha)}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Finalement, on conclut que $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ en utilisant la définition 2.5.1. ■

Propriété 2.5.24 (Transformée de Fourier d'une convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$) *Pour tout* $(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$*, on a*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)(\xi) \times \mathcal{F}(g)(\xi).$$

Autrement dit : dans la classe de Schwartz, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est, à une constante multiplicative près, le produit (classique) des transformées de Fourier.

Preuve. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Écrivons pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f \star g)(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \mathrm{d}x \qquad (2.69)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-i\xi((x-y)+y)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} g(x-y) \mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} \mathrm{d}y \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En admettant pour le moment que les hypothèses du théorème 2.3.26 de Fubini sont vérifiées, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} g(x-y) \mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \qquad (2.70)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) \mathrm{e}^{-i\xi(x-y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) \mathrm{e}^{-i\xi u} \mathrm{d}u \mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{d}y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) \mathrm{e}^{-i\xi u} \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\xi) \times \mathcal{F}(g)(\xi),
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème du changement de variable 2.1.74. Justifions maintenant que les hypothèses du théorème 2.3.26 de Fubini utilié ci-dessus sont vérifiées. Pour cela, obsevons que, puisque $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left| (1+y^2)^2 f(y)(1+(x-y)^2) g(x-y) \right| \leq M.$$

Ceci implique

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(y)g(x-y)| \leq \frac{M}{1+y^2} \times \frac{1}{1+y^2} \frac{1}{1+(x-y)^2}. \qquad (2.71)$$

Observons, que, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 2$, la fonction

$$h_x : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \frac{1}{1+y^2} \frac{1}{1+(x-y)^2} \end{pmatrix},$$

est majorée sur $\mathbb{R}$ par sa valeur en $\frac{x \pm \sqrt{x^2-2}}{2}$. On en déduit que la fonction

$$u : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\right)^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{x^2-2}}{2}\right)^2} \mathbb{1}_{]-\infty,2] \cup [2,+\infty[}(x) + \mathbb{1}_{]-2,2[}(x) \end{pmatrix},$$

vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad h_x(y) \leq u(x).$$

Puisque la fonction $x \mapsto (1+x^2)u(x)$ est de plus majorée sur $\mathbb{R}$, il vient qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u(x)\leq C/(1+x^2)$. En particulier, utilisant (2.71), il vient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}, \qquad \left|f(y)\mathrm{e}^{-i\xi y}g(x-y)\mathrm{e}^{-i\xi(x-y)}\right| \leq \frac{M}{1+y^2}\frac{C}{1+x^2}.$$

Cette majoration par le produit de deux fonctions (absolument) intégrables sur $\mathbb{R}$, l'une par rapport à la première variable, l'autre par rapport à la seconde, permet d'appliquer le théorème de Fubini à l'intégrande (continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et à valeurs complexes à $\xi\in\mathbb{R}$ fixé), pour passer de (2.69) à (2.70). ∎

2.5.6 Le théorème de Plancherel

Définition 2.5.25 *Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit la fonction*

$$R(f):\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & \overline{f(-x)}\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5.26
1. *Vérifier que $R(f)\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
2. *Justifier que R définit une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.*
3. *Justifier que R est une involution.*
4. *En déduire que R est une application bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.*
5. *Justifier que*

$$\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \quad \forall\xi\in\mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(f\star R(f))(\xi)=\sqrt{2\pi}\left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2.$$

Définition 2.5.27 *Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\lambda>0$ et $x_0\in\mathbb{R}$, on définit les fonctions*

$$D_\lambda(f):\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & f(\lambda x)\end{pmatrix} \qquad et \qquad T_{x_0}(f):\begin{pmatrix}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ x & \longmapsto & f(x-x_0)\end{pmatrix}.$$

Exercice 2.5.28 (Dilatations et translations)
1. *Vérifier que $D_\lambda(f)\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $T_{x_0}(f)\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*
2. *Vérifier que D_λ et T_{x_0} sont des applications linéaires de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.*
3. *Vérifier que $D_\lambda\circ D_{1/\lambda}=T_{x_0}\circ T_{-x_0}=\mathrm{Id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})}$.*
4. *En déduire que D_λ et T_{x_0} sont des applications bijectives de $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ dans lui-même.*
5. *Justifier que*

$$\forall\xi\in\mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}(D_\lambda f)(\xi)=\frac{1}{\lambda}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \qquad et \qquad \mathcal{F}(T_{x_0}f)(\xi)=\mathrm{e}^{-i\xi x_0}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Propriété 2.5.29 *On a l'inclusion*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})\subset\mathcal{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle est Riemann-intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Il en est donc de même de f^2 et de $|f^2|$. De plus, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (1+x^2)|f(x)| \leq M.$$

En particulier, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)|^2 \leq \left(\frac{M}{1+x^2}\right)^2.$$

Puisque la fonction $x \mapsto M^2/(1+x^2)^2$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la fonction $|f|^2$. ■

Propriété 2.5.30 (Identité de Plancherel) *On a*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \qquad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi. \tag{2.72}$$

Preuve. Utilisons à nouveau la suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en (2.39) pour une certaine suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs qui tend vers 0. Soit $f \in \mathcal{S}$. Notons $R(f)$ la fonction définie en 2.5.25. Posons $g = f \star R(f)$. Par l'exercice 2.5.26, on a que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(g) = \sqrt{2\pi}|\mathcal{F}(f)|^2$. On peut donc définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\rho_n \star g$ par (2.40). De plus on a $\rho_n \star g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ par la propriété 2.5.22. Par la propriété 2.4.7, on a

$$(\rho_n \star g)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(0).$$

Or

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0-y)R(f)(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(-y)\overline{f(-y)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \,\mathrm{d}y,$$

en utilisant le théorème de changement de variable de la propriété 2.1.74. Ainsi,

$$(\rho_n \star g)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \,\mathrm{d}y. \tag{2.73}$$

Par ailleurs, utilisant l'exercice 2.63, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n\xi}{2}\right)^2}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\varepsilon_n}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)^2} = \rho_n(x).$$

Ainsi, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(\rho_n \star g)(0) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_n(0-y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n\xi}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-i\xi y}\mathrm{d}\xi\right) g(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Afin d'utiliser le théorème de Fubini 2.3.26, remarquons que l'intégrande est une fonction continue de (ξ, y) sur $\mathbb{R}^2$, et que son module vérifie

$$\forall \xi, y \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n\xi}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{-i\xi y}g(y)\right| \leq M\mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n\xi}{2}\right)^2}\frac{1}{1+y^2},$$

pour un certain $M > 0$ puisque $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Cette majoration permet d'appliquer le théorème de

Fubini 2.3.26 pour obtenir

$$\begin{aligned}
(\rho_n \star g)(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g)(\xi) \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon_n \xi}{2}\right)^2} \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$h : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\varepsilon, \xi) & \longmapsto & \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\varepsilon \xi}{2}\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, elle vérifie

$$\forall (\varepsilon, \xi) \in \mathbb{R}^2, \qquad |h(\varepsilon, \xi)| \leq \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2.$$

Le majorant étant dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et indépendant de $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale de $\xi \mapsto h(\varepsilon, \xi)$ converge sur $\mathbb{R}$ uniformément par rapport au paramètre ε dans $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction

$$H : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varepsilon & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} h(\varepsilon, \xi) \mathrm{d}\xi \end{pmatrix},$$

est continue sur $\mathbb{R}$ par la propriété 2.3.18. En particulier,

$$(\rho_n \star g)(0) = H(\varepsilon_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} H(0) = \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Par unicité de la limite de la suite $\left((\rho_n \star g)(0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$, on déduit de la ligne précédente et de (2.73) que (2.72) a lieu. ■

Corollaire 2.5.31 (Identité de Plancherel polarisée) *Pour tout* $(f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$, *on a*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} \mathrm{d}\xi. \tag{2.74}$$

Preuve. Pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on pose

$$q_1(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad q_2(f) = \int_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{F}(f)(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi,$$

et

$$\varphi_1(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Ces quatres fonctions sont bien définies à l'aide des propriétés 2.5.29 et 2.2.27. De plus, on a par simple calcul pour $k \in \{1, 2\}$,

$$\varphi_k(f, g) = \frac{1}{4} \left(q_k(f+g) - q_k(f-g) + i q_k(f+ig) - i q_k(f-ig) \right). \tag{2.75}$$

L'identité de Plancherel (2.72) assure que $q_1 = q_2$. La relation ci-dessus assure par conséquent que $\varphi_1 = \varphi_2$. ■

Remarque 2.5.32 *Les fonctions q_1 et q_2 sont des formes quadratiques sur l'espace vectoriel complexe $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont les formes hermitiennes associées. Le fait que q_1 et q_2 coïcindent sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ implique que φ_1 et φ_2 coïncident également sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, par la relation* (2.75)*, appelée dans ce contexte identité de polarisation.*

Remarque 2.5.33 *La forme*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})\times\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

est hermitienne, définie et positive sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. C'est donc un produit scalaire complexe sur $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. La norme associée est donnée par $\|f\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\mathrm{d}x}$. En appliquant (2.74) *à f et $\tilde{g} = \mathcal{G}(g)$, on obtient*

$$\forall f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\qquad \langle f,\mathcal{G}(g)\rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\mathcal{G}(g)(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{g(\xi)}\mathrm{d}\xi = \langle\mathcal{F}(f),g\rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Ceci indique que l'application linéaire $\mathcal{F}$ admet $\mathcal{G}$ comme adjoint dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$.

Remarque 2.5.34 *Avec les notations de la remarque précédente, une manière d'écrire l'identité de Plancherel de la propriété 2.5.30 est de dire que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une isométrie de $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2})$ dans lui-même. On obtient sans peine (et en exercice) qu'il en est de même de sa bijection réciproque $\mathcal{G}$.*

Remarque 2.5.35 *Attention, l'espace $(\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$ est un espace préhilbertien complexe qui n'est pas complet.*

2.5.7 Application à une équation elliptique linéaire en dimension 1

Exercice 2.5.36 *Soit $c>0$ et $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On cherche une fonction $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que*

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad -u''(x)+cu(x) = f(x). \tag{2.76}$$

1. *Justifier que, si $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est solution de* (2.76)*, alors on a*

$$\forall\xi\in\mathbb{R},\qquad \left(c+\xi^2\right)\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi).$$

2. *Justifier que $\xi\mapsto\mathcal{F}(f)(\xi)/(c+\xi^2)$ est une fonction de la classe de Schwartz.*
3. *Justifiquer que l'équation* (2.76) *admet une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Chapitre 3

Équations différentielles

Chapitre 4

Fonctions d'une variable complexe